Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Vingt-huitième semaine (géométrie affine)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Théorème de Carathéodory. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension n, et $x_1, \ldots, x_m$ des points de $\mathcal{E}$. On considère une combinaison convexe $x = t_1x_1 + \cdots + t_mx_m$ avec $t_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_i t_i = 1$. Montrer qu'on peut réécrire cette combinaison convexe de sorte qu'au plus $n+1$ des t_i soient non nuls.*

Solution : On procède par récurrence sur m. Pour $m \leq n+1$, il n'y a rien à montrer. Supposons donc $m \geq n+2$. L'hypothèse de récurrence permet d'ores et déjà de supposer les t_i tous non nuls (sans quoi en le supprimant on est ramené à un m plus petit). Par ailleurs, puisque $\mathfrak{E}$ est de dimension n, et que les x_i sont en nombre au moins $n+2$, ils sont affinement liés, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tels que $\sum_i \lambda_i = 0$, et $\sum_i \lambda_i x_i$, les λ_i n'étant pas tous nuls (cela se voit en écrivant le fait que les $x_i - x_0$ sont linéairement liés et en développant). Pour tout réel α, on a alors $\sum_i (t_i + \alpha\lambda_i)x_i = x$, avec $\sum_i (t_i + \alpha\lambda_i) = 1$. Considérons le plus petit α en valeur absolue tel qu'un des $t'_i = t_i + \alpha\lambda_i$ soit nul (un tel α existe, et c'est précisément celui des réels $-t_i/\lambda_i$ (pour les i tels que $\lambda_i \neq 0$) qui est le plus petit en valeur absolue). On a alors $t'_i \geq 0$ pour tout i (par le théorème des valeurs intermédiaires) et $t'_i = 0$ pour un i. Par ailleurs, on a toujours $\sum_i t'_i = 1$ et $\sum_i t'_i x_i = x$, et on conclut par hypothèse de récurrence puisqu'on peut maintenant éliminer un des t_i.

Théorème de Markoff-Kakutani. *Soit K une partie convexe fermée bornée non vide d'un espace affine normé $\mathfrak{E}$ réel (c'est-à-dire un espace affine dont le vectoriel tangent est normé — pour simplifier, on pourra prendre $\mathfrak{E}$ euclidien) de dimension finie. Soit Γ un ensemble d'applications affines de E envoyant K dans lui-même et qui commutent (deux à deux). Montrer que Γ a un point fixe dans K, c'est-à-dire qu'il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in \Gamma$.*

Solution : Commençons par montrer le résultat lorsque Γ est réduit à un seul élément u. Soit x_0 un point quelconque de K, et notons $x_n = \frac{1}{n}(x_0 + u(x_0) + \cdots + u^{n-1}(x_0))$: on a bien $x_n \in K$ parce que $u^i(x_0) \in K$ pour tout i (puisque que K est stable par u) et que x_n est une combinaison convexe de tels points (et que K est convexe). Par ailleurs, $u(x_n) - x_n = \frac{1}{n}(u^n(x_0) - x_0)$ tend vers 0 puisque sa norme est majorée par $\frac{M}{n}$ où M majore la distance entre deux points quelconques de K (l'existence de M est précisément le fait que K est borné). D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge vers un point a, et $a \in K$ puisque K est fermé; comme $u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}$ tend vers 0, on a $u(a) = a$, donc a est un point fixe, ce qu'il fallait démontrer.

Traitons maintenant le cas où $\Gamma = \{u_1, \ldots, u_r\}$ est fini, par récurrence sur r. Pour $r = 0$, c'est trivial. Si $r > 0$, considérons le sous-ensemble K' de K constitué des points laissés fixes par $u_1, \ldots, u_{r-1}$. Par hypothèse de récurrence on sait que K' est non vide. Or K' est clairement fermé (c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $x \mapsto \sum \|u_i(x) - x\|$) et borné (puisqu'il est inclus dans K), et K' est convexe (vérification immédiate). De plus, K' est stable par u_r car si $x \in K'$, on a $u_i(u_r(x)) = u_r(u_i(x)) = u_r(x)$ donc $u_r(x) \in K'$ (on rappelle que les u_i ont été supposées deux à deux permutables). D'après ce qu'on a déjà montré, on sait donc que u_r a un point fixe dans K', et alors ce point est fixe par tous les u_i, ce qu'il fallait démontrer.

Traitons enfin le cas général où Γ est (éventuellement) infini. Pour tout $u \in \Gamma$, notons K_u l'ensemble des points de K fixes par u. On a vu que pour tous $u_1, \ldots, u_r \in \Gamma$ on a $K_{u_1} \cap \cdots \cap K_{u_r} \neq \varnothing$, et on veut montrer que $\bigcap_{u \in \Gamma} K_u \neq \varnothing$. Comme les K_u sont des fermés dans K qui est un fermé borné en dimension finie, ceci découle du théorème de Borel-Lebesgue.

Systèmes de Steiner. *Soient $1 < t < k < v$ des entiers. On appelle* <u>*système de Steiner*</u> *de type (t, k, v) un ensemble X de cardinal v muni d'un ensemble $\mathcal{B}$ constitués de parties à k éléments de X, appelés "blocs", de telle sorte que t éléments (distincts) quelconques de X appartiennent toujours à un unique bloc.*

(1) Calculer le nombre de blocs d'un système de Steiner de type (t, k, v).

(2) Soit q un nombre premier (ou plus généralement une puissance d'un nombre premier); montrer qu'il existe un système de Steiner de type $(2, q, q^2)$.

(3) Soit q un nombre premier (ou plus généralement une puissance d'un nombre premier); montrer qu'il existe un système de Steiner de type $(2, q+1, q^2+q+1)$.

(4) Soit $m \geq 3$. Montrer qu'il existe un système de Steiner de type $(3, 4, 2^m)$.

(5) Montrer qu'il n'existe pas de système de Steiner de type $(3, 9, 27)$.

Solution :

(1) Un bloc est déterminé par le choix de t éléments parmi v, ce qui fait C_v^t choix possibles. Mais il y a C_k^t façons de nommer le même bloc de cette façon. Le nombre de blocs est donc

$$\frac{C_v^t}{C_k^t} = \frac{v(v-1)\cdots(v-t+1)}{k(k-1)\cdots(k-t+1)}$$

En particulier, s'il existe un système de Steiner de type (t, k, v), cette quantité doit être un entier.

(2) Soit $\mathbb{F}_q$ l'unique corps à q éléments (pour q premier, c'est $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$). On considère un espace affine X de dimension 2 sur $\mathbb{F}_q$, et on appelle bloc de X une droite de l'espace affine. Il est clair que X a q^2 éléments, et toute bloc de X, étant un espace affine de dimension 1 sur $\mathbb{F}_q$, a q éléments. Enfin, deux points distincts de X appartiennent a une et une seule droite. On a donc construit un système de Steiner de type $(2, q, q^2)$.

(3) On considère cette fois pour X l'ensemble des droites vectorielles dans un espace vectoriel V de dimension 3 sur $\mathbb{F}_q$. Une droite vectorielle est déterminée par la donnée d'un vecteur non nul, et il y a $q^3 - 1$ tels vecteurs; comme chaque droite est déterminée par $q - 1$ vecteurs (un vecteur ou un de ses multiples donne la même droite), le cardinal de X est $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2+q+1$. On appellera un bloc de X l'ensemble de toutes les droites vectorielles contenues

dans un certain plan vectoriel de V. Par un raisonnement semblable, tout plan vectoriel contient exactement $q+1$ droites vectorielles, c'est-à-dire que tout bloc de X est de cardinal $q+1$. Enfin, deux droites vectorielles distinctes de V sont contenues dans un unique plan vectoriel, à savoir l'espace vectoriel qu'elles engendrent. On a donc construit un système de Steiner de type $(2, q+1, q^2+q+1)$ (le plan projectif sur $\mathbb{F}_q$).

(4) On considère pour X un espace affine de dimension m sur $\mathbb{F}_2$, et on appelle bloc de X un plan (affine) de cet espace affine. Clairement, X est de cardinal 2^m, et chaque bloc est de cardinal 4. Enfin, comme trois points ne peuvent jamais être alignés, trois points distincts déterminent toujours un unique plan: on a donc construit un système de Steiner d'indices $(3, 4, 2^m)$.

(5) Si un tel système existait, $\frac{27\times26\times25}{9\times8\times7}$ devrait être entier. Mais 7 est premier et ne divise aucun terme du numérateur, ce qui est une contradiction.

Remarque : On sait qu'il existe un système de Steiner de type $(5, 8, 24)$. De plus, il est unique à isomorphisme près. Mis à part qu'il s'agit d'un objet réellement miraculeux, il joue un rôle très important en théorie des groupes finis (son groupe d'automorphismes est le groupe M_{24} de Mathieu, un des plus petits groupes sporadiques), et il permet de construire un code correcteur d'erreur remarquable, le code de Golay.