Exercices de khôlle pour la MPSI
Année scolaire 1997-1998

Vingt-septième semaine (espaces euclidiens de dimension 2 et 3)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`*)*

Exercice folklorique. *On considère une partition du plan euclidien en n parties telles que deux points à distance 1 ne soient jamais dans la même partie. Montrer que la partition a au moins 4 parties. Montrer qu'il existe une telle partition avec au plus 7 parties.*

Exercice agricole. *On considère n points dans le plan euclidien $F_1, \ldots, F_n$ (les "fermes") et n points $P_1, \ldots, P_n$ (les "puits"). On supposera que les $2n$ points $F_1, ldots, F_n, P_1, \ldots, P_n$ sont en position générique, c'est-à-dire que trois quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés. Montrer qu'il existe un $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que les n segments $[F_i; P_{\sigma(i)}]$ soient deux à deux disjoints (il existe une façon de relier chaque ferme à un puits et un seul par un chemin rectiligne de façon que les chemins ne se coupent jamais).*

Archiclassiquissime. *Soit $\mathfrak{E}$ un espace euclidien (pipeau obligatoire : "de dimension 2 ou 3"), et p un projecteur de $\mathfrak{E}$. On appelle norme de p le plus petit réel K tel que $\|p(x)\| \leq K\|x\|$ pour tout x, et on le note $\|p\|$. Montrer que $\|p\| \geq 1$, avec égalité si et seulement si p est un projecteur orthogonal.*

Exercice ridicule. *Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de points du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne soient jamais alignés et que la distance entre deux quelconques d'entre eux soit un entier. Montrer que I est fini.*