Exercices de khôlle pour la MPSI
Année scolaire 1997-1998

Vingt-sixième semaine (équations différentielles d'ordre 1, fonctions convexes)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`*)*

Évidences(?). *Soit A un ouvert. Montrer que l'eveloppe convexe de A est un ouvert. Ceci reste-t-il vrai pour un fermé ? Soit A un convexe. Montrer que l'intérieur de A est un convexe (l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A, c'est-à-dire l'ensemble des points dont A est un voisinage. Montrer que l'adhérence de A est un convexe (l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A, c'est-à-dire l'ensemble des points adhérents à A).*

Exercice curieux. *Soit A un convexe, a un point intérieur à A (c'est-à-dire un point dont A est un voisinage), b un point adhérent à A. Montrer que $[a;b[\subseteq A$ (où $[a;b[$ désigne l'ensemble des $(1-t)a+tb$ où t parcourt $[0;1[$).*

Théorème du tonneau. *On appelle "tonneau" de $\mathbb{R}^n$ une partie T de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) T *est convexe.*
(ii) T *est fermé.*
(iii) T *est équilibré, c'est-à-dire que si $x \in T$ et que $-1 \leq t \leq 1$ alors $tx \in T$.*
(iv) T *est absorbant, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\frac{x}{t} \in T$ pour t suffisamment grand.*

Montrer que tout tonneau est un voisinage de 0. Pour cela, on pourra d'abord supposer que le tonneau T est borné, puis introduire sa "jauge" j_T définie comme ceci :

$$j_T(x) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+^* \colon \tfrac{x}{t} \in T\}$$

et montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Complétude des champs de vecteurs bornés. *Soit $\mathcal{X}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et borné. On considère l'équation différentielle $\frac{dM}{dt} = \mathcal{X}(M)$. Montrer que toute solution maximale de cette équation (dite encore orbite de $\mathcal{X}$) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

Théorèm archi-ultra-classiquissime. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines de P' sont situées dans l'eveloppe convexe de celles de P.*