Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Vingt-cinquième semaine (différentielles sans différentielles)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`*)*

Lemme de Rolle généralisé. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$: on appelle intérieur de A et on note A° le plus grand ouvert contenu dans A, autrement dit l'ensemble des points dont A est un voisinage. Supposons maintenant que A soit un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ dont l'intérieur est non vide, et que $f\colon A \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue dont la restriction à A° soit différentiable. On suppose encore que f est constante sur $A \setminus A^\circ$. Montrer alors qu'il existe un point de A° où ∇f (le gradient de f) s'annule.*

Une démonstration du théorème de H. A. Schwarz. *Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage d'un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$. On définit $F(u, v) = f(x+u, y+v) - f(x+u, y) - f(x, y+v) + f(x, y)$. Donner une majoration de*

$$v\frac{\partial f}{\partial y}(x+u, y) - v\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - uv\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \qquad \dagger$$

D'autre part, en posant $B(h) = f(x+u, y+h) - f(x, y+h) - v\frac{\partial f}{\partial y}(x+u, y+h) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h)$, calculer $B'(h)$ et le majorer. En déduire une majoration de

$$B(v) - B(0) = F(u, v) - v\frac{\partial f}{\partial y}(x+u, y) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x, u) \qquad \ddagger$$

Puis en sommant (†) et (‡), en déduire le théorème de Schwarz.

Un résultat intéressant (quoiqu'un peu hors-sujet). *Soit $f\colon [0; 1] \to [0; 1]^2$ une fonction C^1. Montrer que f n'est pas surjective.*

Théorème célèbre. *On rappelle qu'une partie D de $\mathbb{R}^n$ est dite dense ssi pour toute boule ouverte non vide B de $\mathbb{R}^n$ l'intersection $D \cap B$ est non vide. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}$, G_i est un ouvert dense (de $\mathbb{R}^n$). Montrer que l'intersection des G_i est dense (mais ce n'est pas nécessairement un ouvert).*