# Exercices de khôlle pour la MPSI

## Année scolaire 1997-1998

Vingt-quatrième semaine (nihil novi sub sole)

*David A. Madore* (`david.madore@ens.fr`)

**Lemme d'"évitement".** *Soit $\gamma\colon[0;1]\to\mathbb{R}^2$ une courbe continue, et $x\in\mathbb{R}^2$ un point quelconque. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$ il existe une courbe continue $\gamma'\colon[0;1]\to\mathbb{R}^2$ qui ne passe pas par $x$ et telle que $|\gamma'(t)-\gamma(t)|\leq\varepsilon$ pour tout $t$. [Indication : Délimiter autour de $x$ une zone "de sécurité" (la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $\varepsilon/2$) et une zone "interdite" (la boule fermée de centre $x$ et de rayon $\varepsilon/4$). On construit $\gamma'$ de façon à coïncider avec $\gamma$ en-dehors de la zone de sécurité, à être dans celle-ci exactement quand $\gamma$ y est, et à ne jamais pénétrer dans la zone interdite.]*

**Théorème célèbre.** *On rappelle qu'une partie $D$ de $\mathbb{R}^n$ est dite dense ssi pour toute boule ouverte non vide $B$ de $\mathbb{R}^n$ l'intersection $D\cap B$ est non vide. On suppose que pour tout $i\in\mathbb{N}$, $G_i$ est un ouvert dense (de $\mathbb{R}^n$). Montrer que l'intersection des $G_i$ est dense (mais ce n'est pas nécessairement un ouvert).*

**Compacité.** *Soit $K$ une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$. On suppose donnée une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts tels que $K\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$. Il s'agit de montrer qu'il existe $J\subseteq I$ <u>fini</u> tel que $K\subseteq\bigcup_{i\in J}U_i$. [On dit que "de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini".] Pour cela, on montrera d'abord [lemme de précompacité] que pour tout $\varepsilon>0$, $K$ peut être recouvert par une famille finie de boules ouvertes de rayon $\varepsilon$ (c'est-à-dire qu'il existe $x_1,\ldots,x_n$ tels que $K\subseteq\bigcup_{k=1}^n B(x_k,\varepsilon)$. On montrera [lemme de Lebesgue] alors qu'il existe un $\varepsilon>0$ tel que pour tout $x\in K$ la boule $B(x,\varepsilon)$ soit incluse dans un des $U_i$. On pourra alors conclure.*

**Mon exercice à l'ENS de Lyon.** *On considère un homéomorphisme $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire que $f$ est bijective, continue et de réciproque $f^{-1}$ continue). Pour $a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$, on pose*

$$M_f(a,r)=\sup\{\|f(x)-f(a)\|\colon\|x-a\|\leq r\}$$

*Montrer que le* sup *en question est atteint, et n'est atteint que pour des points $x$ tels que $\|x-a\|=r$. Montrer que la fonction $r\mapsto M_f(a,r)$ est strictement croissante. On pose de même, pour $a\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$,*

$$m_f(a,r)=\inf\{\|f(x)-f(a)\|\colon\|x-a\|\geq r\}$$

*Montrer que l'*inf *en question est atteint, et n'est atteint que pour des points $x$ tels que $\|x-a\|=r$. Montrer que la fonction $r\mapsto m_f(a,r)$ est strictement croissante. On a clairement $m_f(a,r)\leq M_f(a,r)$. On supposera désormais qu'il existe une constante $K_f\geq 1$ telle que pour tous $a$ et $r$ on ait $m_f(a,r)\leq M_f(a,r)\leq K_f m_f(a,r)$ (dans ces circonstances, on dit que l'homéomorphisme $f$ est quasi-conforme). Montrer qu'alors $M_f(a,2r)\leq(1+K_f)M_f(a,r)$. Montrer que $m_f(a,2r)\geq(1+K_f^{-1})m_f(a,r)$. Montrer que les homéomorphismes quasi-conformes forment un groupe pour la composition. [Je ne sais pas quelle serait la question suivante. C'est tout ce que j'ai fait à l'oral.]*

**Le théorème de L. E. J. Brouwer (dans $\mathbb{R}^2$).** *On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. On pose $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\colon|z|\leq 1\}$ et $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}\colon|z|=1\}$. Le but de cet exercice est de montrer le*

*résultat suivant : si $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est continue alors elle admet un point fixe (i.e. il existe $x \in \mathbb{D}$ tel que $f(x) = x$). On procède en quatre étapes. Premièrement, soit $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{U}$ continue : montrer qu'il existe une application $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout $x$ (il s'agit d'un théorème de relèvement). Pour cela, on pourra écrire $g(x) = g(0)\prod_{p=1}^{m} G_p(x)$ avec $G_p(x) = g(\frac{px}{m})/g(\frac{(p-1)x}{m})$, et choisir l'entier $m$ assez grand pour qu'aucune des fonctions $G_p$ ne prenne la valeur $-1$. Deuxièmement, si $h\colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ est continue, montrer qu'il existe deux points antipodaux (i.e. opposés, i.e. de la forme $x, -x$) de $\mathbb{U}$ qui ont la même image par $h$. Pour cela, on pourra considérer la fonction $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(t) = h(e^{i(t+\pi)}) - h(e^{it})$, et constater $H(\pi) = -H(0)$. Troisièmement, montrer qu'il n'existe pas de fonction $r\colon \mathbb{D} \to \mathbb{U}$ telle que $r(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{U}$ (on dit que le disque ne peut pas se rétracter continuement sur le cercle). Pour cela, on utilisera les deux résultats précédents. Enfin, montrer le résultat voulu. Pour cela, on supposera qu'il existe $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sans point fixe, et on considèrera l'application $r$ qui à un point $x \in \mathbb{D}$ associe l'intersection de $\mathbb{U}$ et de la demi-droite ouverte d'origine $f(x)$ passant par $x$.*