Exercices de khôlle pour la MPSI
Année scolaire 1997-1998

Vingt-troisième semaine (espaces vectoriels normés, courbes paramétrées)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Lemme d'"évitement". *Soit $\gamma\colon [0;1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe continue, et $x \in \mathbb{R}^2$ un point quelconque. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une courbe continue $\gamma'\colon [0;1] \to \mathbb{R}^2$ qui ne passe pas par x et telle que $\|\gamma'(t) - \gamma(t)\| \leq \varepsilon$ pour tout t. [Indication: Délimiter autour de x une zone "de sécurité" (la boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon/2$) et une zone "interdite" (la boule fermée de centre x et de rayon $\varepsilon/4$). On construit γ' de façon à coïncider avec γ en-dehors de la zone de sécurité, à être dans celle-ci exactement quand γ y est, et à ne jamais pénétrer dans la zone interdite.]*

Inexistence de la mécanique quantique. *Soit E un espace vectoriel normé. Montrer qu'il ne peut pas exister deux applications linéaires continues p et q telles que $pq - qp = 1$ (où 1 désigne l'identité de E).*

Bases binormées. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer qu'il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de E telle que $\|e_i\| = 1$ pour tout i et que $\|e_i^*\|_* = 1$ pour tout i où $e_1^*, \ldots, e_n^*$ est la base duale et $\|\cdot\|_*$ la norme subordonnée dans le dual (i.e.$\|\varphi\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|$). Pour cela, on considérera le sup de la valeur absolue du déterminant (par rapport à une base quelconque) comme fonction sur l'ensemble des familles $x_1, \ldots, x_n$ de vecteurs unitaires de E.*

Mon exercice à l'ENS de Lyon. *On considère un homéomorphisme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire que f est bijective, continue et de réciproque f^{-1} continue). Pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose*

$$M_f(a, r) = \sup\{\|f(x) - f(a)\| \colon \|x - a\| \leq r\}$$

Montrer que le sup *en question est atteint, et n'est atteint que pour des points x tels que $\|x - a\| = r$. Montrer que la fonction $r \mapsto M_f(a, r)$ est strictement croissante. On pose de même, pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$,*

$$m_f(a, r) = \inf\{\|f(x) - f(a)\| \colon \|x - a\| \geq r\}$$

*Montrer que l'*inf *en question est atteint, et n'est atteint que pour des points x tels que $\|x - a\| = r$. Montrer que la fonction $r \mapsto m_f(a, r)$ est strictement croissante. On a clairement $m_f(a, r) \leq M_f(a, r)$. On supposera désormais qu'il existe une constante $K_f \geq 1$ telle que pour tous a et r on ait $m_f(a, r) \leq M_f(a, r) \leq K_f m_f(a, r)$ (dans ces circonstances, on dit que l'homéomorphisme f est quasi-conforme). Montrer qu'alors $M_f(a, 2r) \leq (1 + K_f) M_f(a, r)$. Montrer que $m_f(a, 2r) \geq (1 + K_f^{-1}) m_f(a, r)$. Montrer que les homéomorphismes quasi-conformes forment un groupe pour la composition. [Je ne sais pas quelle serait la question suivante. C'est tout ce que j'ai fait à l'oral.]*