Exercices de khôlle pour la MPSI
Année scolaire 1997-1998

Vingt-deuxième semaine (réduction, intégrales généralisées)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`*)*

Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E, et soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un plus grand n tel que $x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$ soit une famille libre. On complète cette famille libre en une base de E: écrire la forme de la matrice représentative de u dans cette base, en déduire la forme de χ_u et montrer que $\chi_u(u)(x) = 0$. Conclure.*

Une autre démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. *Montrer que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai pour les matrices diagonalisables. En déduire, par densité, qu'il est vrai pour toutes les matrices. Note: tout ceci ne marche que sur $\mathbb{C}$.*

Un tout petit théorème de Wedderburn. *On dit qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie est semisimple si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E stable par u a un supplémentaire stable par u. Montrer que u est semisimple ss'il est diagonalisable. Ce résultat reste-t-il vrai sur $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$?*

Une inégalité grotesque. *Soit u une fonction de classe C^2 sur un intervalle fermé borné $[a;b] \subseteq \mathbb{R}$ (avec $a < b$). On suppose que u est nulle en a et b et strictement positive sur $]a;b[$. Montrer que*

$$\int_a^b \left| \frac{u''(t)}{u(t)} \right| dt \geq \frac{4}{b-a}$$

[Indication: Notant $\|u\|$ la borne supérieure de u sur $[a;b]$, et c un point où cette borne est atteinte, montrer que $\frac{1}{\|u\|} \int_a^b |u''(t)|\, dt \geq \frac{1}{\|u\|}(\sup_{t\in[a;c]} u'(t) - \inf_{t\in[c;b]} u'(t))$.]

Exercice peut-être un peu difficile. *On rappelle que si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel normé complexe E de dimension finie, on définit sa norme $\|u\|$ par*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

On rappelle par ailleurs qu'il s'agit bien là d'une norme sur $L(E)$, et que de plus on a $\|uv\| \leq \|u\|\,\|v\|$ pour tous $u, v \in L(E)$. Par ailleurs, on définit le rayon spectral de u, noté $\|u\|_{\mathrm{s}}$, comme le plus grand module d'une valeur propre de u. Montrer que

$$\|u\|_{\mathrm{s}} = \lim_{n\to+\infty} \|u^n\|^{1/n}$$

(formule du rayon spectral).