Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Vingt-et-unième semaine (déterminants)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`*)*

Exercice astucieux et sans intérêt. *Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = AB$ et que $AB - BA$ soit inversible. Montrer que 3 divisen.*

Exercice nettement plus intéressant. *Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$ (i.e.qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = MAM^{-1}$). Montrer qu'elles le sont encore sur $\mathbb{R}$ (i.e.qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = MAM^{-1}$).*

Un déterminant remarquable. *Soient $a, b, x_1, \ldots, x_n$ des complexes. Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

[Indication: Ajouterx à tous les termes, et montrer que le déterminant ainsi obtenu est une fonction linéaire dex.]

Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E, et soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un plus grand n tel que $x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$ soit une famille libre. On complète cette famille libre en une base de E: écrire la forme de la matrice représentative de u dans cette base, en déduire la forme de χ_u et montrer que $\chi_u(u)(x) = 0$. Conclure.*