Exercices de khôlle pour la MPSI
Année scolaire 1997-1998

Dix-neuvième semaine (espaces euclidiens)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Cauchy-Schwarzisation. *Soit E un ensemble de cardinal fini n, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, dont le cardinal (en tant qu'ensemble de couples) est m, et telle qu'il y ait r classes d'équivalences. Montrer que $n^2 \leq mr$.*

Autre Cauchy-Schwarzisation. *Soit (u_n) une suite de réels telle que la série (Σu_n^2) converge (ce qui signifie, si on ne le sait pas déjà, que la suite $(\sum_{\ell=1}^n u_\ell^2)$ est majorée). Montrer que*

$$\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell = O(\sqrt{n})$$

Puis montrer qu'en fait on peut remplacer O par o dans cette formule.

Normes et projecteurs. *Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour $u\colon E \to E$ linéaire, on note $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ (ou encore $\sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, c'est évidemment la même chose). On suppose maintenant que u est un projecteur: montrer que $\|u\| \geq 1$ et que $\|u\| = 1$ si et seulement si u est une projection orthogonale.*

Distance à des points. *Soit E un espace euclidien de dimension n et soient $P_0, \ldots, P_n$ des points de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $P_0, \ldots, P_n$ pour que les distances d'un point M à $P_0, \ldots, P_n$ déterminent M de façon unique.*

Familles obtusangles. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n: on appelle famille obtusangle de E une famille de vecteurs de E tels que le produit scalaire de deux quelconques d'entre eux soit négatif (strictement). Déterminer le cardinal maximal d'une famille obtusangle de E.*