Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Dix-huitième semaine (fonctions usuelles, fonctions rationnelles)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Valuations de $\mathbb{C}(X)$. *Une valuation (discrète normalisée non triviale) de $\mathbb{C}(X)$ (au-dessus de $\mathbb{C}$) est une application $v\colon \mathbb{C}(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
(N) v prend la valeur 1.
(C) Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ alors $v(\lambda) = 0$; $v(0) = \infty$.
(1) Pour $f, g \in \mathbb{C}(X)$, on a $v(fg) = v(f) + v(g)$.
(2) Pour $f, g \in \mathbb{C}(X)$, on a $v(f + g) \geq \min(v(f), v(g))$.

(L'addition et l'ordre sur $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ étant définis par $k + \infty = \infty$ et $k \geq \infty$ pour tout $k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.) Déterminer toutes les valuations (discrètes normalisées non triviales) de $\mathbb{C}(X)$ (au-dessus de $\mathbb{C}$). Montrer la formule dite "du produit" (puisqu'il s'agit d'une somme)

$$\sum_v v(f) = 0$$

pour tout $f \in \mathbb{C}(X) \setminus \{0\}$, la somme étant prise sur toutes les valuations (discrètes normalisées non triviales) de $\mathbb{C}(X)$ (au-dessus de $\mathbb{C}$).

Le logarithme. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur un élément $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe un $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$ (i.e. à quelle condition peut-on prendre la primitive d'une fonction rationnelle complexe).*

Théorème de Fermat. *Le grand théorème de Fermat, démontré en 1994 par Andrew Wiles, affirme que pour tout $n \geq 3$ il n'existe pas de x, y, z dans $\mathbb{Z}$ tous non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$. Montrer ce résultat en remplaçant "dans $\mathbb{Z}$" par "dans $\mathbb{C}[X]$".*