Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Dix-septième semaine (matrices)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Simplicité de $\mathbb{M}_n(k)$. *On rappelle qu'un idéal (bilatère) $\mathfrak{I}$ d'un anneau A est un un sous-groupe additif de A tel que $ax \in \mathfrak{I}$ et $xa \in \mathfrak{I}$ dès que $a \in A$ et $x \in \mathfrak{I}$. Montrer que les seuls idéaux (bilatères) de $\mathbb{M}_n(k)$ sont 0 (par là, on entend $\{0\}$, bien entendu) et $\mathbb{M}_n(k)$.*

Plus difficile : déterminer les idéaux à gauche (resp. à droite) de $\mathbb{M}_n(k)$ (on devine ce que c'est...).

Centre de $\mathbb{M}_n(k)$. *Déterminer l'ensemble des matrices $H \in \mathbb{M}_n(k)$ telles que $MH = HM$ pour toute matrice $M \in \mathbb{M}_n(k)$.*

Exercice classique. *Montrer que toute forme linéaire sur $\mathbb{M}_n(k)$ peut s'écrire $M \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA\,M)$ avec $A \in \mathbb{M}_n(k)$, que ce sont bien des formes linéaires et qu'elles sont deux à deux distinctes.*

Exercice sans grand intérêt. *On appelle magique une matrice (carrée) dans laquelle la somme de chaque ligne, et également la somme de chaque colonne est nulle. Montrer que les matrices magiques forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_n(k)$ et calculer sa dimension ; montrer que le produit de deux matrices magiques est encore magique.*

Exercice pour épater la galerie. *Soit $M \in \mathbb{M}_n(k)$ inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in k[X]$ tel que $M^{-1} = P(M)$.*