Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Seizième semaine (théorie du rang, matrices)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Lemme des cinq. *Soit*

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_1 & \xrightarrow{u_1} & E_2 & \xrightarrow{u_2} & E_3 & \xrightarrow{u_3} & E_4 & \xrightarrow{u_4} & E_5 \\
{\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\downarrow & & {\scriptstyle f_5}\downarrow \\
E'_1 & \xrightarrow{u'_1} & E'_2 & \xrightarrow{u'_2} & E'_3 & \xrightarrow{u'_3} & E'_4 & \xrightarrow{u'_4} & E'_5
\end{array}$$

Un diagramme commutatif d'espaces vectoriels de dimension finie dont les lignes sont exactes. Autrement dit, les E_i et E'_i sont des espaces vectoriels de dimension finie et les u_i, les u'_i et les f_i sont des applications linéaires ; dire que le diagramme est commutatif signifie que $f_2u_1 = u'_1f_1$, que $f_3u_2 = u'_2f_2$ et ainsi de suite ; dire que les lignes sont exactes signifie que $\ker u_2 = \operatorname{im} u_1$ et $\ker u_3 = \operatorname{im} u_2$ et ainsi de suite (et aussi pour les u'_i). On suppose de plus que f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes. Montrer qu'il en va alors de même de f_3. Pour cela, on commencera par montrer que f_3 est injectif en prenant un $x \in E_3$ tel que $f_3(x) = 0$ pour montrer que $x = 0$; ensuite, on montrera que f_3 est surjectif, soit par une méthode semblable soit par des considérations de dimension et de rang.

Simplicité de $\mathbb{M}_n(k)$. *On rappelle qu'un idéal (bilatère) $\mathfrak{I}$ d'un anneau A est un un sous-groupe additif de A tel que $ax \in \mathfrak{I}$ et $xa \in \mathfrak{I}$ dès que $a \in A$ et $x \in \mathfrak{I}$. Montrer que les seuls idéaux (bilatères) de $\mathbb{M}_n(k)$ sont 0 (par là, on entend $\{0\}$, bien entendu) et $\mathbb{M}_n(k)$.*

Centre de $\mathbb{M}_n(k)$. *Déterminer l'ensemble des matrices $H \in \mathbb{M}_n(k)$ telles que $MH = HM$ pour toute matrice $M \in \mathbb{M}_n(k)$.*

Exercice classique. *Soit k un corps et A une k-algèbre de dimension finie. On suppose que A est intègre, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in A$ on a $xy = 0$ seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. Montrer alors que A est un corps.*

Micro-Frobenius. *Soit K une algèbre de dimension finie sur $\mathbb{C}$ qui est un corps. Montrer que K est (à isomorphisme canonique près) égale à $\mathbb{C}$.*