Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Quatorzième semaine (intégrales)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Irrationnalité de π. *On se propose de démontrer que le nombre π est irrationnel. Pour cela, on suppose par l'absurde que $\pi = a/b$. Posons $p_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$ et $I_n = \int_0^\pi p_n(x)\sin x\,dx$.*

1) *Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*
2) *Montrer que p_n et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en 0 et π.*
3) *Montrer que I_n est entier pour tout n.*
4) *Conclure.*

Théorème de Riemann-Lebesgue. *Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que*

$$\int_a^b f(t)\,e^{int}\,dt \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

Lemme de van der Corput. *Soient $\lambda > 0$, $a < b$ réels, et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'' \geq \lambda$. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant ni de f ni de a ni de b ni de λ telle que*

$$\left|\int_a^b e^{if(t)}\,dt\right| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$$

(Étapes : Expliquer comment on peut se ramener à $a = 0$ et $f'(0) = 0$. On considère alors $\int_0^b e^{if(t)}dt$. Intégrer par parties sur $[x;b]$ en faisant apparaître $if'(t)$ au numérateur et au dénominateur. Estimer l'intégrale, et choisir x judicieusement. Conclure.)

Une convolution. *Soient $\varphi, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues avec $\varphi \geq 0$ sur $[a;b]$. On suppose de plus que φ atteint sa borne supérieure en un seul point $c \in [a;b]$. Montrer qu'alors*

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)^n\,g(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\,dx} \to g(c)$$

Démonstration complète (car cet exercice est à connaître absolument) **:** Supposons $\varphi(c) = M$, de sorte que $\varphi(x) < M$ si $x \neq c$. Posons $h(x) = g(x) - g(c)$ et $I_n = \frac{\int_a^b \varphi(x)^n\,g(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\,dx}$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $\eta > 0$ tel que si $|x-c| \leq \eta$ alors $|h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (ce qui est possible par continuité de g). Posons de plus $N = \sup_{[a;b]} |h|$ et $M' = \sup_{[a;b]\setminus]c-\eta;c+\eta[} \varphi$. Puisque $[a;b]\setminus]c-\eta;c+\eta[= [a;c-\eta] \cup [c+\eta;b]$ (du moins si η est assez petit, ce qu'on peut toujours supposer), φ atteint la valeur M', et donc $M' < M$. On pose alors $M'' = \frac{M+M'}{2}$ (ou, du reste, n'importe quel réel strictement compris entre M et M'). Soit enfin $\delta > 0$

tel que si $|x-c| \leq \delta$ alors $\varphi(x) \geq M''$ (ce qui est possible par continuité de φ). On a

$$I_n = g(c) + \frac{\int_{c-\eta}^{c+\eta} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx} + \frac{\int_{\text{ailleurs}} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx}$$

Appelons I'_n le second terme et I''_n le troisième (bien sûr, $\int_{\text{ailleurs}}$ signifie ici $\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b$). Puisque $|h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sur $[c-\eta; c+\eta]$, on a $|I'_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour estimer I''_n, on note tout d'une part que

$$\left| \int_{\text{ailleurs}} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx \right| \leq N(b-a)(M')^n$$

et de l'autre que

$$\int_a^b \varphi(x)^n\, dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \varphi(x)^n\, dx \geq 2\delta (M'')^n$$

Par conséquent, on a

$$|I''_n| \leq \frac{N(b-a)}{2\delta} \lambda^n$$

où $\lambda = M'/M'' < 1$. Mais alors $\lambda^n \to 0$ et il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors $|I''_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que si $n \geq n_0$, on a $|I_n - g(c)| \leq |I'_n| + |I''_n| \leq \varepsilon$; et donc $I_n \to g(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

Moyennes d'une fonction. *Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x avec $m > 0$. Posons $S(t) = [\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^t\, dx]^{1/t}$.*

1) *Trouver $\lim_{t\to 0} S(t)$ (on utilisera un développement limité de $f(x)^t$).*
2) *Trouver $\lim_{t\to +\infty} S(t)$ (on considérera un petit intervalle autour du maximum).*
3) *Trouver $\lim_{t\to -\infty} S(t)$.*