Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Treizième semaine (polynômes)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Exercice censé être très facile. *Montrer que les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes ne sont pas des polynômes :* $t \mapsto e^t$, $t \mapsto \sin t$, $t \mapsto \sqrt[3]{t}$, $t \mapsto 1/(1+t^2)$.

L'anneau $k[X]$ est principal. *Soit k un corps. On rappelle qu'un idéal $\mathfrak{a}$ de $k[X]$ est un sous-groupe additif de $k[X]$ tel que si $P \in k[X]$ et $Q \in \mathfrak{a}$ alors $PQ \in \mathfrak{a}$. Si $P \in k[X]$, montrer que l'ensemble $(P) := \{PQ : Q \in k[X]\}$ est un idéal de $k[X]$ (ceci est vrai dans n'importe quel anneau commutatif). Montrer réciproquement que tout idéal de $k[X]$ est de cette forme (ceci est une propriété remarquable de l'anneau $k[X]$ qui se traduit en disant que $k[X]$ est "principal").*

Un résultat très important (mais pas en prépa). *Soient k_1 et k_2 deux corps tels que $k_1 \subseteq k_2$ (on dit que k_2 est une extension de corps de k_1 — ce qui est implicite, c'est que les opérations d'addition et de multiplication dans k_1 sont les restrictions de celles de k_2). On suppose que P, Q sont des éléments de $k_1[X]$ et que Q divise P dans $k_2[X]$. Montrer que Q divise P dans $k_1[X]$.*

> **Remarque :** Il s'agit là d'un théorème de descente. Les mathématiques abondent de résultats de montée ou de descente. Voici un autre exemple dans le même genre : si $k_1 \subseteq k_2$ sont des corps et $x_1, \ldots, x_r \in k_1^s$ sont linéairement indépendants dans le k_2-espace vectoriel k_2^s alors ils le sont encore dans le k_1-espace vectoriel k_1^s. Dans les deux cas, pour montrer le résultat le plus simple est de trouver une caractérisation "absolue", dans un cas de la divisibilité (au moyen de la division euclidienne : le reste est nul), dans l'autre de l'indépendance linéaire (au moyen du déterminant) ; une autre méthode consisterait à faire appel à la "théorie de Galois".

Sur les rationnels... *Montrer que les polynômes X^2-2, X^3-2 et X^4-2 sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.*

Exercice plus difficile. *On dit qu'un nombre complexe z est algébrique (sur $\mathbb{Q}$) ssi il existe un polyôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(z) = 0$. Montrer que z est algébrique si et seulement si le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $1, z, z^2, z^3, \ldots$ est de dimension finie (c'est-à-dire admet une famille génératrice finie). En déduire que l'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est en fait un corps (on le note $\bar{\mathbb{Q}}$).*