Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Douzième semaine (nombres complexes)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Introduction à la théorie de Galois. *Première partie : le tracé du pentagone. Soit $\zeta = e^{2i\pi/5}$. On pose $\omega = \zeta + \zeta^4$; calculer $\omega^2 + \omega$; en déduire la valeur de ω ; calculer $\zeta^2 - \omega\zeta$; en déduire la valeur de ζ (c'est-à-dire une expression de ζ construite à partir des entiers en prenant des sommes, différences, produits, quotients, et racines carrées). En particulier, donner la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$. Deuxième partie : le tracé du polygone à 17 côtés (Gauss, âgé de 19 ans). Soit $\zeta = e^{2i\pi/17}$. On pose $\omega = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^{16} + \zeta^{15} + \zeta^{13} + \zeta^9$; calculer $\omega^2 + \omega$; en déduire la valeur de ω ; on pose $\lambda = \zeta + \zeta^4 + \zeta^{16} + \zeta^{13}$; calculer $\lambda^2 - \omega\lambda$; en déduire la valeur de λ ; on pose $\mu = \zeta + \zeta^{16}$; calculer $\mu^2 - \lambda\mu$; en déduire la valeur de μ ; calculer $\zeta^2 - \mu\zeta$; en déduire la valeur de ζ.*

> **Remarque :** Un nombre complexe est dit “constructible” s'il s'écrit ainsi avec des sommes, différences, produits, quotients et racines de rationnels. On montre que z est constructible si et seulement si on peut construire le point d'affixe z dans le plan en partant des points 0 et 1, avec un compas et une règle non graduée. Ainsi, le pentagone et l'heptadécagone sont constructibles à la règle non graduée et au compas. En fait, le polygône régulier à n sommets est constructible (i.e. $\zeta = e^{2i\pi/n}$ l'est) si et seulement si $n = 2^r p_1 \cdots p_k$ avec r un entier naturel et $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers de Fermat distincts, c'est-à-dire des nombres premiers égaux à un plus une puissance de deux. Les seuls nombres premiers de Fermat connus sont 3, 5, 17, 257 et 65537.

Introduction aux réseaux elliptiques. *Considérons l'ensemble E des couples (ω_1, ω_2) de complexes non nuls tels que $\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$ (où $\Im$ désigne la partie imaginaire). Si $(\omega_1, \omega_2) \in E$, on définit $\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \{k\omega_1 + \ell\omega_2 : k, \ell \in \mathbb{Z}\}$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur E par $(\omega_1, \omega_2) \sim (\omega_1', \omega_2')$ ssi $\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \Lambda(\omega_1', \omega_2')$. Montrer que dans ce cas, $\Im(\omega_1\bar{\omega}_2) = \Im(\omega_1'\bar{\omega}_2')$. Interprétation géométrique ?*

Exercice de coloriage. *On suppose données trois parties D_1, D_2, D_3 de $\mathbb{C}$, deux à deux disjointes et telles que $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe deux complexes z, z' appartenant à la même partie et tels que $|z - z'| = 1$.*

> **Remarque :** Ce qui est étrange, c'est que si on remplace 3 par 4, 5 ou 6, le problème est ouvert. En revanche, pour 7 parties, le résultat est faux.

Résolution de l'équation générale du troisième degré ; la méthode de Cardan. *On se propose de décrire une méthode permettant de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.*

(i) Expliquer comment se ramener à $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
(ii) Expliquer comment, par une translation, se ramener à $x^3 + px + q = 0$.
(iii) Résoudre l'équation en posant $z = u + v$ où $3uv = -p$.