Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Onzième semaine (ev)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Permutation de quantificateurs. *Soit E un espace vectoriel sur un corps K, et $f: E \to E$ une application linéaire. On suppose que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda \in K$ tel que $f(x) = \lambda x$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $f(x) = \lambda x$. (Autrement dit, si l'image d'un vecteur x est toujours colinéaire* à celui-ci, alors f est une homothétie.)*

Un peu de projecteurs. *Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses projecteurs. On définit une relation binaire sur ceux-ci par*

$$p \leq q \iff (pq = p \text{ et } qp = p)$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. Comment la caractériser en termes d'images et de noyaux ? Est-ce une relation d'ordre total ?

Un peu d'indépendance linéaire. *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ d'éléments de cet espace vectoriel (ici λ décrit $\mathbb{R}$) est libre (c'est-à-dire que toutes ses sous-familles finies sont libres). Plus difficile : montrer que la famille $(x \mapsto \cos \lambda x)_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ est libre. Question à deux sous : l'est-elle encore si on remplace $\mathbb{R}_+$ par $\mathbb{R}$ (non, parce que sinon on ne poserait pas la question) ? Encore une indépendance : montrer que la famille $(x \mapsto |x - \lambda|)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.*

> **Avertissement :** Quiconque commence à écrire des sommes infinies déraisonables (typiquement $\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \alpha_\lambda e^{\lambda x}$ sans préciser que tous les α_λ sont nuls sauf un nombre fini) a toutes les chances de se faire tirer dessus à la mitrailleuse lourde au concours. Autre chose : c'est peut-être vicieux de ma part d'avoir utilisé λ comme paramètre de ma famille alors que je suis presque sûr que le cours utilise λ justement comme coefficient dans les combinaisons linéaires. Mais on ne résiste pas à un petit test, n'est-ce pas ?

Beaucoup de questions d'un coup. *L'image/l'image réciproque par une application linéaire quelconque/in/sur/bijective d'une famille libre/génératrice/d'une base est-elle encore libre/génératrice/une base ?*

> **Remarque :** Évidemment, il faudra préciser ce qu'on entend par image réciproque d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ par une application f. Normalement personne ne devrait commencer à traiter l'exercice avant d'avoir éclairci ce point. Je vois au moins deux définitions naturelles possibles : la famille obtenue en mettant ensemble, pour chaque i, toutes les images réciproques de x_i, ou bien la famille obtenue en prenant pour chaque i une image réciproque (s'il y en a) de x_i.

* En fait, cette dernière assertion est plus forte, puisque dire que x est colinéaire à y ne revient pas à dire que $x = \lambda y$ pour un certain λ (penser à $y = 0$). Mais ici, puisque $f(0) = 0$ de toute façon, cela ne fait pas de différence.