Exercices de khôlle pour la MPSI

Année scolaire 1997-1998

Dixième semaine (TAF, DL)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Moyennes. *Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. On pose $M(t) = (\frac{x_1^t + \cdots + x_n^t}{n})^{1/t}$. Trouver la limite de $M(t)$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$.*

Exercice destiné à mettre en évidence bien des difficultés. *Donner un équivalent de $\arccos t$ quand $t \to 1^-$. Préciser cet équivalent (i.e. donner un développement limité du rapport).*

Théorème de Liouville. *Soit f un polynôme à coefficients entiers, de degré n, et ξ une racine de f (autrement dit, on suppose que $a_n \xi^n + \cdots + a_0 = 0$ avec les a_i entiers), ξ irrationnel et $f'(\xi) \neq 0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout rationnel p/q (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) on ait*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^n}$$

(on dit que ξ ne peut pas être approché par des rationnels mieux qu'à l'ordre n).

> **Remarque :** Le mathématicien anglais K. F. Roth a démontré que le n dans la formule ci-dessus peut être remplacé par n'importe quel réel strictement supérieur à 2. Ce résultat très profond lui a valu la médaille Fields* en 1958.

Exercice subtil (mais pas tant que ça). *Soit A un anneau et $x \in A$ un élément pour lequel il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$ (on dit que x est nilpotent). Montrer qu'il existe $y \in A$ tel que $y^2 = (1 - x)$. [Indication : Utiliser le développement limité de $\sqrt{1 - x}$.]*

Le sinus itéré. *Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. On définit une suite (u_n) par récurrence en posant $u_0 = x$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sin u_n$. Montrer que $u_n \to 0$. Donner la limite quand $x \to 0$ de $(\sin x)^{-2} - x^{-2}$, et en déduire celle de $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$, puis un équivalent de u_n^{-2}, et finalement de u_n.*

* L'équivalent mathématique du prix Nobel.