Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Neuvième semaine (espaces euclidiens ; suites de fonctions)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Existence de simplexes réguliers. *Soit E un espace vectoriel (ou affine) euclidien de dimension n. On appelle k-simplexe régulier unitaire dans E une suite finie $P_0, \ldots, P_k$ d'éléments de E tels que $\|P_j - P_i\| = \delta_{ij}$. Montrer qu'il existe dans E des n-simplexes réguliers unitaires, que deux n-simplexes réguliers unitaires de E sont l'image l'un de l'autre par une isométrie affine, que si $P_0, \ldots, P_n$ est un n-simplexe régulier unitaire alors c'est une base affine de E, que la distance d'un point Q de E aux P_i détermine ce point, qu'il existe un unique point Z de E équidistant des P_i et que c'est $\frac{1}{n+1}(P_0 + \cdots + P_n)$ (l'isobarycentre des P_i), et enfin qu'il n'existe pas de $(n+1)$-simplexe régulier unitaire dans E.*

Projection sur un convexe fermé. *Soit E un espace euclidien et $K \subseteq E$ un convexe fermé. Montrer que pour tout $x \in E$ la distance de x à K est atteinte en un unique point de K, noté $p(x)$. Montrer que pour tout $x \in E$ et $y \in K$, on a $(y - p(x)|x - p(x)) \leq 0$, et que cette propriété caractérise $p(x)$. Montrer enfin que p est 1-lipschitzienne.*

Limites simples de fonctions continues. *On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un F_σ ss'il est union dénombrable de fermés, un G_δ ss'il est intersection dénombrable d'ouverts (i.e. son complémentaire est un F_σ). Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de la classe 1 de Baire ssi pour tout α les ensembles $\{x: f(x) > \alpha\}$ et $\{x: f(x) < \alpha\}$ sont des F_σ.*

1) *Montrer que les limites simples de fonctions continues sont dans la classe 1 de Baire.*
2) *Montrer que si $A \subseteq \mathbb{R}$ est à la fois un F_σ et un G_δ (on dit que A est $\mathbf{\Delta}^0_2$) alors sa fonction indicatrice χ_A est limite simple de fonctions continues.*
3) *Montrer que si $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergent uniformément vers f et que f_n est limite simple de fonctions continues pour tout n alors f l'est aussi. [Indication : on se ramènera à supposer que $\|f_n - f\|_\infty \leq 2^{-n}$, on écrira $f_{n+1} - f_n$ comme la limite simple d'une suite de fonctions continues, uniformément majorée par $2^{-(n-1)}$, et on resommera...]*
4) *On veut montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de la classe 1 de Baire alors elle est limite simple de fonctions continues. Montrer qu'on peut pour cela se ramener au cas où l'image de f est contenue dans $]0; 1[$.*
5) *On admet temporairement le résultat suivant : si $\mathbb{R}$ est réunion d'un nombre fini $A_1, \ldots, A_k$ de F_σ, alors il existe des $B_i \subseteq A_i$ qui sont à la fois des F_σ et des G_δ et tels que $\mathbb{R}$ soit réunion de $B_1, \ldots, B_k$. Montrer alors le résultat voulu.*
6) *Montrer que si A et B sont deux F_σ il existe deux F_σ A^* et B^* disjoints contenus respectivement dans A et B et ayant la même union qu'eux. (On dit que les F_σ ont la propriété de réduction.)*
7) *Conclure (c'est-à-dire montrer le résultat admis au 5).*

Théorème d'Ascoli. *Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions de K dans $\mathbb{R}$ telles que*

(i) *$\mathcal{F}$ est uniformément équicontinu, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in K$ vérifiant $|x - y| < \delta$ et tout $f \in \mathcal{F}$ on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

(ii) *$\mathcal{F}$ est ponctuellement borné, c'est-à-dire que pour tout $x \in K$ l'ensemble $\{f(x): f \in \mathcal{F}\}$ est borné.*

Montrer qu'alors de toute suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément.

Fonctions réglées. *On appelle fonction réglée (sur un intervalle compact I de $\mathbb{R}$) une limite uniforme de fonctions en escalier. Montrer qu'une fonction est réglée ssi elle admet en chaque point une limite à gauche et une limite à droite.*

Reprise de la semaine dernière. *Soit I un intervalle compact ne contenant pas d'entier. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.*

Dini. *Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et f_n une suite de fonctions réelles continues sur I convergeant simplement vers une fonction f continue sur I. On suppose que $f_n(x)$ croît quand n croît à x fixé (resp. quand x croît à n fixé) : montrer que la convergence est uniforme.*

Exercice de coloriage. *On suppose que le plan euclidien est partitionné en trois parties. Montrer qu'il existe deux points à distance 1 l'un de l'autre situés dans la même partie. Montrer que le résultat est incorrect si on remplace "trois" par "sept".*

> **Remarque :** Pour un nombre de parties compris entre quatre et six, il s'agit là d'un problème ouvert.

Exercice nacsze. *Soit (P_i) une famille de points du plan euclidien tels que trois quelconques d'entre eux soient non alignés et que $|P_i - P_j|$ soit toujours un entier. Montrer que la famille est finie.*