Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Huitième semaine (formes quadratiques ; suites de fonctions)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Une variante de Weierstraß. *Soit I un intervalle réel compact ne contenant pas d'entier. Montrer que toute fonction réelle continue sur I est limite uniforme de fonctions de $\mathbb{Z}[X]$.*

Formes quadratiques sur les corps finis. *On un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments où q est une puissance d'un nombre premier impair (on ne demande pas de montrer l'existence d'un tel corps). Soit φ une forme quadratique sur $\mathbb{F}_q$ (c'est-à-dire sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_q$) de rang ≥ 2: montrer que l'image de φ est $\mathbb{F}_q$ tout entier. En déduire que toute forme quadratique de rang n sur $\mathbb{F}_q$ est équivalente à*

$$X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2 + X_n^2$$

ou

$$X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2 + aX_n^2$$

où a est un élément fixé de $\mathbb{F}_q$ qui n'est pas un carré. En déduire que deux formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang et même discriminant (modulo un carré).

La notion de convergence simple n'est pas métrisable. *Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles bornées définies sur I. Montrer qu'il n'existe aucune distance d sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ telle que $f_n \to f$ simplement ssi $d(f_n, f) \to 0$. [Note de moi : cet exercice est peut-être un peu dur ; la méthode que j'ai trouvée est : la fonction indicatrice des rationnels n'est pas une limite simple de fonctions continues (cela peut se montrer de diverses façons), mais elle est limite simple de fonctions qui sont limites simples de fonctions continues (c'est évident). On pourra montrer que si f est limite simple de fonctions continues alors pour tous $\beta > \alpha$ l'ensemble $\{x \in I \colon \beta > f(x) > \alpha\}$ est un F_σ (une union dénombrable de fermés) (c'est assez facile ; ce qui est plus dur c'est la réciproque mais on n'en a pas besoin).]*

> **Remarque :** Les limites simples de fonctions continues s'appellent les fonctions de la classe 1 de Baire. L'exercice suivant montre que l'ensemble de leurs points de continuité est résiduel.

Points de continuité d'une limite simple. *Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et f_n une suite de fonctions continues sur I convergeant simplement vers une fonction f. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, on pose*

$$F_{N,\varepsilon} = \{x \in I \colon \forall n \geq N (|f_N(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon)\}$$

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{N=1}^{+\infty} F_{N,\varepsilon}^\circ$$

($F^{\circ}_{N,\varepsilon}$ étant l'intérieur de $F_{N,\varepsilon}$).

$$R = \bigcap_{\varepsilon>0} \Omega_{\varepsilon}$$

Montrer que R est intersection dénombrable d'ouverts denses et que f est continue en chaque point de R. En déduire en particulier qu'une dérivée est continue sur un G_δ dense. Réciproquement, montrer que sur pour tout G_δ dense il existe une dérivée ayant exactement cet ensemble comme ensemble de points de continuité.

Remarque : Personne n'est encore arrivé à donner une caractérisation satisfaisante des dérivées des fonctions réelles. On connaît une assez bonne condition nécessaire (être une fonction de Darboux (c'est-à-dire vérifier la propriété des valeurs intermédiaires) et être dans la classe 1 de Baire (cf. supra) — ce qui est remarquable, c'est que les fonctions de Darboux de la classe 1 de Baire forment un espace vectoriel, ce qui n'était pas du tout évident *a priori* ; par exemple, les fonctions de Darboux ne forment pas un espace vectoriel), et une assez bonne condition suffisante (mais celle-ci est un peu technique : être bornée et "approximativement continue"). Toutefois, les seules conditions nécessaires et suffisantes connues (l'une d'elles est appelé le critère de Neugebauer) sont à peu près inutilisables.