Exercices de khôlle pour la MP*
Année scolaire 1997-1998

Septième semaine (réduction, analyse locale)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Exercice de non cofinalité. *Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(t) = o(f(t))$ lorsque $t \to +\infty$ pour tout t.*

Exercice assez remarquable. *Soit A une algèbre commutative de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. On suppose que A est réduite, c'est-à-dire n'a pas d'éléments nilpotents autres que 0. Montrer que $A \cong \mathbb{C}^n$ (en tant qu'algèbre).*

Exercice presque aussi remarquable. *Soit A une algèbre commutative de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. On suppose que A est connexe, c'est-à-dire n'a pas d'éléments idempotents autres que 0 et 1 (i.e. $x^2 = x$ implique $x = 0$ ou $x = 1$). Montrer que A est engendrée sur $\mathbb{C}$ (en tant qu'algèbre) par un nombre fini d'éléments nilpotents.*

> **Remarque :** Ces deux exercices, même s'il n'y paraît pas, sont en fait des exercices de géométrie algébrique : une algèbre commutative engendrée sur $\mathbb{C}$ (en tant qu'algèbre) par un nombre fini d'éléments correspond à ce que l'on appelle encore un "schéma affine algébrique sur $\mathbb{C}$". L'hypothèse que l'algèbre est de dimension finie se traduit en disant que le schéma est "artinien", c'est-à-dire géométriquement de dimension 0 ; dans le premier exercice, on montre que si le schéma est sans déformations infinitésimales, c'est une simple réunion de n points, et dans le second, on montre que s'il est connexe, c'est un point avec une déformation infinitésimale.

Germes de fonctions. *Soit $a \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{H}_a$ l'ensemble des germes de fonctions C^∞ au voisinage de a, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions C^∞ définies au voisinage de a dans lequel on identifie deux fonctions qui coïncident sur un voisinage de a. Montrer que $\mathcal{H}_a$ est un anneau. Montrer que $\mathcal{H}_a$ a un unique idéal maximal $\mathfrak{m}_a$ (on appelle idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau A un idéal de A différent de A et qui n'est inclus dans aucun autre idéal de A différent de A) : on dit que l'anneau $\mathcal{H}_a$ est <u>local</u>. Que vaut $\mathcal{H}_a/\mathfrak{m}_a$? Quelle est la dimension de $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ comme $\mathcal{H}_a/\mathfrak{m}_a$-espace vectoriel ? Comment peut-on interpréter la classe dans $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ d'une fonction C^∞ au voisinage de a et s'annulant en a ? Montrer que l'anneau local $\mathcal{H}_a$ est <u>hensélien</u>, c'est-à-dire que si P est un polynôme unitaire de $\mathcal{H}_a[X]$ et que la classe $\bar{P}$ de P dans $(\mathcal{H}_a/\mathfrak{m}_a)[X]$ s'écrit $\bar{P} = \bar{Q}\bar{R}$ avec $\bar{Q}$ et $\bar{R}$ unitaires et étrangers, alors il existe Q, R dans $\mathcal{H}_a[X]$ tels que $P = QR$ et que $\bar{Q}$ et $\bar{R}$ soient les classes respectives de Q et R dans $(\mathcal{H}_a/\mathfrak{m}_a)[X]$.*

Un problème posé dans les news (donc trop facile :-). *Soit M une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant que 1 comme valeur propre et telle que $\|M\| = 1$ (où $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$). Montrer que $M = 1$.*

Formule du rayon spectral. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel normé complexe E. On notera $\|u\|$ pour la norme de u comme endomorphisme, et $\|u\|_{\mathrm{s}}$ pour le plus grand module d'une valeur propre de u (le rayon spectral de u). Montrer que*

$$\|u\|_{\mathrm{s}} = \lim_{n\to+\infty} \|u^n\|^{1/n}$$

Semisimplicité. *Soit T un endomorphisme d'un espace vectoriel E complexe de dimension finie. On dit que T est semisimple ssi tout sous-espace vectoriel de E stable par T admet un supplémentaire stable par T. Montrer que T est semisimple ssi T est diagonalisable. Ce résultat demeure-t-il vrai dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$? [Tout cela est peut-être un peu trop facile en MP^*.]*