Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Troisième semaine (dualité, matrices ; espaces métriques)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Exercice rigolo. *Soit (u_n) une suite réelle. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$. On suppose que u_n est bornée et que w_n converge. Montrer que v_n et w_n tendent vers 0.*

Exercice classique. *Trouver les idéaux bilatères, les idéaux à gauche et les idéaux à droite de l'anneau $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.*

Objet universel dans la catégorie des exercices classiques. *Montrer que toute forme linéaire sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est de la forme $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ avec A une certaine matrice.*

Encore un super-classique. *Soient A et B deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles le sont sur $\mathbb{R}$.*

Plus difficile. *Soit M une matrice de trace nulle ; montrer qu'il existe A et B tels que $M = AB - BA$. [*Indications : *1) Montrer par construction récurrencielle d'une base que M est semblable à une matrice de diagonale nulle. 2) En supposant donc que M est de diagonale nulle, on peut prendre pour A une matrice purement diagonale.]*

Objet couniversel dans la catégorie des exercices classiques. *On suppose que A et B sont des matrices carrées, et que $1 - AB$ est inversible (1 étant la matrice identité, bien sûr) : montrer que $1 - BA$ l'est aussi.*

Skolem-Noether. *Soit Φ un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A matrice inversible telle que $\Phi(M) = AMA^{-1}$ pour tout M. Pour cela, on pourra montrer que Φ transforme un projecteur de rang 1 en projecteur de rang 1 ; on expliquera ensuite pourquoi on peut supposer que Φ laisse stable un tel projecteur p ; enfin, on conclura en regardant l'image par Φ des projecteurs de même noyau que p.*

Un résultat simple (jeu de mot stupide). *Soit K un corps fini de caractéristique différente de 2 et ayant au moins 7 éléments. Dans le groupe $SL_2(K)$ des matrices 2×2 de K de déterminant 1, on définit une relation d'équivalence $\sim$ par $M \sim M'$ ssi $M = M'$ ou $M = -M'$.*

1) *Montrer qu'on définit une loi de composition sur les classes pour $\sim$ par $\bar{M}\bar{N} = \overline{MN}$, et que $SL_2(K)/\sim$ (l'ensemble des classes) muni de cette loi est un groupe. Ce groupe sera noté $PSL_2(K)$. Le but de l'exercice est de montrer que $PSL_2(K)$ n'a pas de sous-groupe distingué autre que $\{1\}$ et lui-même.*
2) *Si H est distingué dans $SL_2(K)$ et que H contient une transvection, montrer que $H = SL_2(K)$.*
3) *Si M est une matrice 2×2 sur K, inversible, montrer que M est semblable à une matrice diagonale où à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$.*
4) *En déduire que si H est distingué dans $SL_2(K)$ et contient une matrice qui n'est pas une homothétie, alors il contient une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ où $\alpha \notin \{\pm 1\}$, ou une matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\mu^{-1} \\ \mu & \beta \end{pmatrix}$.*

5) *Sous ces hypothèses, montrer que* $H = SL_2(K)$.
6) *Conclure.*
7) *Calculer le cardinal de* $PSL_2(K)$.

Remarque : Dans le cas $K = \mathbb{F}_p$, ce résultat est dû à Camille Jordan (vers 1870). On a ainsi défini toute une famille de groupes simples. En fait, $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ est toujours simple sauf pour quelques cas isolés (p.e. $PSL_2(\mathbb{F}_3)$). Plus généralement, Claude Chevalley a montré comment on pouvait obtenir des groupes simples à partir de groupes de Lie (comme $PSL_n(\mathbb{C})$ ici). Presque tous les groupes simples finis sont soit de type Lie, soit alternés, soit cycliques d'ordre premier ; il n'y a que 26 exceptions.