Exercices de khôlle pour la MP*
Année scolaire 1997-1998

Deuxième semaine (EV, algèbres ; espaces métriques)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Très zouli. *Soit $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue, et $u_0 \in \mathbb{R}^m$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On suppose que la suite (u_n) admet une unique valeur d'adhérence ; montrer qu'elle converge vers cette valeur.

La classique tétralogie des compacts. *Dans ce qui suit, X est un espace métrique compact, dont la distance est notée d.*

1) *On suppose que $f: X \to X$ vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$ distincts. Montrer que f admet un point fixe unique dans f. Est-il vrai que toute suite définie par itération de f converge vers ce point fixe ?*
2) *On suppose que $f: X \to X$ vérifie $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Montrer que f est bijective.*
3) *On suppose que $f: X \to X$ est continue et vérifie $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Montrer que cette inégalité est en fait une égalité.*
4) *On suppose que $f: X \to X$ est bijective et vérifie $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Montrer que cette inégalité est en fait une égalité.*

Théorème de Riesz. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie, et B la boule unité fermée de E. On se propose de montrer que B n'est pas compacte. Pour cela, on suppose par l'absurde qu'elle l'est.*

1) *Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que B soit recouverte par l'union des $B_i = B(x_i, \frac{1}{2})$.*
2) *Montrer qu'il existe $y \in E$ dont la distance δ à $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ soit strictement positive.*
3) *En considérant un élément z de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ dont la distance à y soit inférieure à $\frac{3}{2}\delta$, aboutir à une contradiction.*

Séparabilité et cardinal des métriques compacts. *Soit K un espace métrique compact. Montrer que K a une partie dénombrable dense (on dit que K est séparable). Montrer qu'il existe une injection de K dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (on dit que K a au plus la puissance du continu). Ces deux assertions subsistent-elles pour un espace métrique quelconque ?*

Espaces vectoriels sur les corps finis. *Soit K un corps ayant n éléments, et E un K-espace vectoriel. Montrer que E ne peut pas s'écrire comme la réunion de n ou moins sous-espaces vectoriels propres, mais peut toujours s'écrire comme la réunion de $n+1$ sous-espaces vectoriels propres, du moins tant que l'espace vectoriel en question n'est pas une droite ou nul (pour cette dernière partie, on admettra que tout K-espace vectoriel est isomorphe à K^I pour un certain ensemble I).*

Trop facile. *Montrer que la famille $(\ln p)$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, est libre sur $\mathbb{Q}$.*

Beaucoup plus difficile. *Montrer que la famille $(\sqrt{n})$, où n parcourt l'ensemble des naturels sans facteur carré, est libre sur $\mathbb{Q}$.*

Distraction triangulaire. *1) Soient* A, B *deux parties d'un espace métrique, et* x *un point de cet espace. Montrer que* $d(A, B) \leq d(x, A) + d(x, B)$*. 2) L'affirmation suivante est-elle vraie : si* A *est une partie d'un espace métrique, et* x, y *deux points de cet espace, alors* $d(x, y) \leq d(x, A) + d(y, A)$ *?*

Assez facile. *Soit* A *une algèbre de Banach (c'est-à-dire une algèbre normée vérifiant* $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ *pour tous* x, y *de* A*). Montrer que tout idéal maximal de* A *est fermé (par un idéal maximal, on entend un idéal [bilatère] qui n'est strictement contenu dans aucun autre idéal [bilatère] autre que* A*). Montrer que tout morphisme d'algèbre de* A *vers* $\mathbb{R}$ *est continu. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de* A *est un ouvert.*