Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Première semaine (Algèbre)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Exercice trivial que pourtant personne n'a encore résolu de manière satisfaisante. *A et B étant deux ensembles, préciser*

1) *Les inclusions entre $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.*
2) *Les inclusions entre $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.*
3) *Les implications entre $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ et $A \subseteq B$.*
4) *Les implications entre $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$ et $A \in B$.*

Théorème de Cantor-Bernstein. *Soient X et Y deux ensembles, $f: X \to Y$ et $g: Y \to X$ deux injections. Montrer qu'il existe une bijection $h: X \to Y$.*

Classiquissime. *Soit G un groupe fini, et H un sous-groupe dont l'indice est le plus petit diviseur premier de l'ordre de G. Montrer que H est distingué.*

Exercice surtout difficile à comprendre. *Montrer qu'un groupe finiment engendré (i.e. de type fini) n'admet qu'un nombre fini de sous-groupes d'indice fini donné.*

Super-exo-groupo-introuvable. *On se donne un groupe G, et un automorphisme involutif $\lambda: G \to G$ dont le seul point fixe est 1. Montrer... que G est abélien.*

> **Indication :** Montrer que tout élément de G est de la forme $\lambda(t)t^{-1}$.
>
> **Remarque :** En fait, ce résultat n'est pas aussi isolé qu'il semble l'être : si on remplace l'hypothèse de l'involutivité de λ par une hypothèse "λ est d'ordre k", on montre alors que G est nilpotent, et son indice de nilpotence est au plus $k-1$. Pour $k = 2$, on obtient le résultat ci-dessus.

Théorème de Lagrange. *On se propose de montrer que tout naturel n est la somme des carrés de quatre entiers. En utilisant l'identité suivante*

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2+t^2)(x'^2+y'^2+z'^2+t'^2) \\
=&(xx'+yy'+zz'+tt')^2+(xy'-yx'-zt'+tz')^2 \\
+&(xz'+yt'-zx'-ty')^2+(xt'-yz'+zy'-tx')^2
\end{aligned}$$

expliquer pourquoi on peut supposer $n = p$ premier. En considérant les résidus modulo p de $0^2, 1^2, \ldots, (\frac{p-1}{2})^2$ d'une part, et de $-1-0^2, -1-1^2, \ldots, -1-(\frac{p-1}{2})^2$ de l'autre, montrer qu'il existe x, y, z, t entiers et $0 < m < p$ tels que $x^2+y^2+z^2+t^2 = mp$. Soit l le plus petit tel m : il s'agit donc de montrer que $l = 1$. Par un argument de parité, montrer que l est impair. Supposons à présent $l > 1$, et soient x', y', z', t' les résidus de x, y, z, t respectivement modulo l. En considérant $x'^2+y'^2+z'^2+t'^2$, aboutir à une contradiction.

Exercice mystificateur. *Montrer que pour $n < A$, avec A le plus grand possible (au moins $A = 3 \times 10^6$), il existe $n' \neq n$ vérifiant $\varphi(n') = \varphi(n)$ (où φ est la fonction indicatrice d'Euler).*

> **Remarque :** On conjecture que ce résultat est vrai pour tout n.

Indication : On rappelle que :

a) Si $a \wedge b = 1$ alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$.

b) Si $a \mid b$ alors $\varphi(ab) = a\varphi(b)$.

On montrera le résultat d'abord pour tous les nombres impairs, puis pour les nombres pairs non multiples de 4, puis pour les multiples de 4 mais non de 12, puis pour les multiples de 12 mais non de 36, puis...

Exercice annulaire. *Dans un anneau montrer que :*

1) Un élément admettant un unique inverse à gauche est inversible.

2) Un élément admettant au moins deux inverses à gauche en a une infinité.

D'après OIM. *Montrer qu'il n'existe pas* $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *vérifiant* $\varphi(\varphi(k)) = k + 1997$ *pour tout* k.