Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Vingt-quatrième et dernière semaine (BEST OF)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`*)*

On a regroupé ici des exercices courts mais instructifs ("Short but Sweet") dans un grand nombre de domaines. Les signes ¶ signalent les exercices plus difficiles.

Groupes. *Montrer qu'un groupe finiment engendré (i.e. de type fini) n'admet qu'un nombre fini de sous-groupes d'indice fini donné.*

¶Groupes. *On se donne un groupe G, et un automorphisme involutif $\lambda: G \to G$ dont le seul point fixe est 1. Montrer... que G est abélien.*

Anneaux. *Dans un anneau montrer que :*
1) *Un élément admettant un unique inverse à gauche est inversible.*
¶2) *Un élément admettant au moins deux inverses à gauche en a une infinité.*

Topologie. *Soit $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue, et $u_0 \in \mathbb{R}^m$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On suppose que la suite (u_n) admet une unique valeur d'adhérence ; montrer qu'elle converge vers cette valeur.

¶Nombres. *Montrer que la famille $(\sqrt{n})$, où n parcourt l'ensemble des naturels sans facteur carré, est libre sur $\mathbb{Q}$.*

Nombres. *Montrer qu'un entier pair n est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même si et seulement si $n = 2^{\ell-1}(2^\ell - 1)$ avec $2^\ell - 1$ premier.*

Matrices. *Soient A et B deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles le sont sur $\mathbb{R}$.*

Matrices. *Soient A, B deux matrices carrées $n \times n$ réelles telles que $A^2 + B^2 = AB$ et $AB - BA$ est inversible. Montrer que $3|n$.*

Normes. *Soit E un espace vectoriel normé. Montrer qu'il n'existe pas d'applications linéaires continues $u, v: E \to E$ vérifiant $uv - vu = \mathrm{id}_E$.*

Normes. *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel normé complexe E. On notera $\|u\|$ pour la norme de u comme endomorphisme, et $\|u\|_{\mathrm{s}}$ pour le plus grand module d'une valeur propre de u (le rayon spectral de u). Montrer que*

$$\|u\|_{\mathrm{s}} = \lim_{n\to+\infty} \|u^n\|^{1/n}$$

Polynômes. *Soit I un intervalle réel compact ne contenant pas d'entier. Montrer que toute fonction réelle continue sur I est limite uniforme de fonctions de $\mathbb{Z}[X]$.*

Intégrales. *Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de carré intégrable. Montrer que $\int_0^x f(t)\,dt = o(\sqrt{x})$.*

Séries. *Montrer que la somme des $\frac{1}{n}$ où n parcourt l'ensemble des entiers dans l'écriture décimale desquels ne figure pas le chiffre 3, est convergente (et accessoirement encadrer cette somme).*