Exercices de khôlle pour la MP*
Année scolaire 1997-1998

Vingt-deuxième semaine (équadiffs et tout le tralala)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Un peu de cartographie. *On considère des C^∞-difféomorphismes d'un ouvert de la sphère vers un ouvert du plan: on parlera de cartes. La sphère (à l'exception des pôles — mais comme on ne s'intéresse qu'à des questions locales c'est sans importance) sera paramétrée par la latitude λ et la longitude ϕ, le point de latitude λ et de longitude ϕ étant le point de coordonnées*

$$(\cos\lambda\,\cos\phi, \cos\lambda\,\sin\phi, \sin\lambda) \in \mathbb{R}^3$$

(1) Montrer que l'élément de longueur à la surface de la sphère est

$$ds^2 = d\lambda^2 + \cos^2\lambda\,d\phi^2$$

[Indication: Ce n'est autre que la spécialisation à $r = 1$ d'un système de coordonnées (r, λ, ϕ) de l'espace, dont l'élément de longueur est $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\lambda^2 + r^2\,\cos^2\lambda\,d\phi^2$.]

Une carte est dite <u>conforme</u> lorsqu'elle préserve les angles, <u>équivalente</u> lorsqu'elle préserve les aires.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions $x(\lambda, \phi)$ et $y(\lambda, \phi)$ pour que la carte qu'elles définissent soit équivalente, respectivement conforme. [Réponse écourtée: Commençons par "équivalente": l'élément d'aire à la surface de la sphère est $\cos\lambda\,d\lambda\,d\phi$ (cela se déduit de l'élément de longueur ci-dessus). Lorsqu'on le transporte par la carte, il est multiplié par la jacobienne, ce qui donne

$$\left[\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\phi} - \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right]^{-1} \cos\lambda\;dx\,dy$$

et ceci doit être égal à $dx\,dy$, d'où l'équation voulue, qu'on peut également trouver en remplaçant $dx = \frac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial x}{\partial\phi}d\phi$ et dy de même à condition de ne pas oublier que le produit entre dx et dy est antisymétrique (c'est un produit extérieur). Pour "conforme", il faut et il suffit que l'élément de longueur sur la sphère et sur le plan soient proportionnels (puisque pour conserver les angles on ne peut que transformer les distances de manière isotrope). Or sur la sphère c'est $d\lambda^2 + \cos^2\lambda\,d\phi^2$ et sur le plan c'est $dx^2 + dy^2$ dans lequel on remplace dx et dy par leur valeur.]

(3) On suppose que x est proportionnel à ϕ et que y ne dépend que de λ (on parle de projection équatoriale). Montrer qu'il existe alors une unique carte équivalente, appelée "projection cylindrique équivalente de Lambert" (expliquer ce terme), et une unique carte conforme, appelée "projection équatoriale de Mercator". Quel est l'avantage de la projection de Mercator, sachant que la navigation maritime se fait généralement en suivant des loxodromies à la surface de la Terre (courbes qui interceptent les méridiens à angle constant)? Représenter sommairement la Terre dans ces deux projections.

(4) *On suppose que y est proportionnel à λ. Montrer que dans ces conditions il n'y a pas de carte conforme mais qu'il y a une carte équivalente, appelée "projection sinusoïdale équivalente". Représenter sommairement la Terre dans cette projection.*

(5) *On s'intéresse maintenant à des projections centrées sur le pôle nord et transformant méridiens en rayons par l'origine; autrement dit, le θ des coordonnées polaires du plan est précisément la longitude ϕ, et le $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ des coordonnées polaires est fonction de λ uniquement. Montrer que dans ces circonstances on peut trouver exactement une carte équivalente, appelée "projection d'Albers", et une carte conforme, appelée "projection stéréographique", que l'on décrira géométriquement [comme la projection centrale à partir du pôle sud]. Deux autres cartes de ce type sont d'usage fréquent: la "projection gnomonique", projection centrale à partir du centre de la sphère, et la "projection orthographique", projection orthogonale de la sphère sur le plan. Décrire brièvement les avantages de la projection gnomonique, qui pourtant n'est ni conforme ni équivalente.*

Remarque: Ceci n'est qu'un très sommaire aperçu de quelques projections utilisées en cartographie. Parmi les grands absents, signalons la projection azimuthale équivalente de Lambert et le planisphère de Mollweide, deux cartes équivalentes, ainsi que la projection Mercator Transverse Universelle, qui est conforme.

Le drapeau de l'ONU représente le monde en projection stéréographique centrée sur le pôle nord.

Théorème de sortie des compacts. *Soit $]a;b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $F\colon]a;b[\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Soit $f\colon]\alpha;\beta[\to \Omega$ une solution maximale de $y' = F(t,y)$. On suppose que $\beta < b$. Montrer alors que pour tout compact $K \subseteq \Omega$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $t \in]\beta-\delta;\beta[$ on ait $f(t) \notin K$.*

Commentaire: Autrement dit, une singularité d'une solution d'une équation différentielle ne peut jamais provenir d'un comportement oscillatoire mais correspond toujours à une divergence réelle (sortie des compacts, soit vers l'infini, soit vers les bords du domaine de définition de l'équation).

Exercice modérément sadique. *Trouver toutes les suites (u_n) de réels qui vérifient*

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 4\frac{u_n}{n}$$