# Exercices de khôlle pour la MP*

## Année scolaire 1997-1998

Vingtième semaine (calcul différentiel)

*David A. Madore* (`david.madore@ens.fr`)

**Exercice que personne n'a jamais réussi à résoudre de façon satisfaisante.** *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $x \in U$ la différentielle $df(x)$ est une isométrie. Montrer que $f$ elle-même est localement une isométrie. On suppose maintenant $U$ connexe: montrer que $f$ est une isométrie.*

**Principe du maximum pour les fonctions harmoniques.** *On désigne par $B$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, $\bar{B}$ la boule unité fermée et $S = \bar{B} \setminus B$ la sphère unité.*

(1) *Soit $f\colon \bar{B} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\bar{B}$ et $C^2$ sur $B$ telle que $f|_S \leq 0$ et $\Delta f \geq 0$. On suppose qu'il existe $\xi \in B$ tel que $f(\xi) > 0$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit la fonction $f(x) + \varepsilon(\|x\|^2 - 1)$ atteint son maximum en un point $\xi_0 \in B$. Montrer que $\Delta f(\xi_0) < 0$.*

(2) *Soit $f\colon \bar{B} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\bar{B}$ et $C^2$ sur $B$ telle que $\Delta f = 0$ (on dit que $f$ est harmonique): montrer que les bornes de $f$ sur $\bar{B}$ coïncident avec celles sur $S$.*

**Les anneaux locaux henséliens contre-attaquent.** *On appelle germe en* $0$ *de fonction $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ une fonction $C^\infty$ définie sur un voisinage ouvert de $0$ dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs complexes. On identifie deux telles fonctions lorsqu'elles coïncident sur un voisinage de $0$. L'addition et la multiplication des fonctions définissent une addition et une multiplication sur les germes de fonctions $C^\infty$, et munissent leur ensemble d'une structure d'anneau, $A$. Montrer que cet anneau possède un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$, l'idéal des germes s'annulant en $0$. Montrer la propriété suivante: si $P \in A[T]$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $A$, disons $P(T) = a_0(x) + a_1(x)\,T + \cdots + T^n$, et $\bar{P}(T) = a_0(0) + a_1(0)\,T + \cdots + T^n \in \mathbb{C}[T]$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}$, et qu'on a $\bar{P}(t) = q(t)\,r(t)$ dans $\mathbb{C}[T]$, avec $q(T), r(T)$ des polynômes premiers entre eux, alors il existe $Q(T), R(T) \in A[T]$ tels que $P(T) = Q(T)\,R(T)$ dans $A[T]$ et $q(T) = \bar{Q}(T)$ et $r(T) = \bar{R}(T)$. (Dans ces circonstances, on dit que $A$ est un anneau local hensélien.)*

**Critère différentiel de netteté.** *Soient $U, V$ des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. On appelle forme différentielle sur $U$ une fonction de classe $C^\infty$ sur $U$ et à valeurs dans le dual de $\mathbb{R}^m$ (typiquement, la différentielle d'une fonction $C^\infty$ de $U$ dans $\mathbb{R}$). On obtient une définition semblable,* mutatis mutandis *pour $V$. On note $\Omega^1_U$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes différentielles sur $U$. Soit maintenant $\varphi\colon U \to V$ une application $C^\infty$: lorsque $\omega \in \Omega^1_V$, on définit $\varphi^*\omega \in \Omega^1_U$ par $\varphi^*\omega(x) = \omega(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)$ pour $x \in U$ (comparer avec formule de composition: on a $d(f \circ \varphi) = \varphi^* df$). On note $\Omega^1_{U/V}$ le quotient de $\Omega^1_U$ par le sous-espace vectoriel engendré par les $f\varphi^*\omega$ avec $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ et $\omega \in \Omega^1_V$, et on dit que $\varphi$ est nette (ou non ramifiée) lorsque $\Omega^1_{U/V} = 0$. En résumé, cela signifie que pour toute forme différentielle $\beta$ sur $U$ il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_r$ de classe $C^\infty$ sur $U$ et des formes différentielles $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sur $V$ telles que $\beta = f_1\varphi^*\alpha_1 + \cdots + f_r\varphi^*\alpha_r$. On demande de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi$ soit nette.*

Bon, d'accord, c'est un peu trop difficile, peut-être. D'ailleurs, je ne sais pas le résoudre...