Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Dix-neuvième semaine (séries de Fourier, courbes paramétrées)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Un peu de géométrie algébrique. *On dira qu'une courbe (disons, plane) est* <u>*unicursale*</u> *(ou bien* <u>*de genre 0*</u>*) lorsqu'elle est paramétrable par des fonctions rationnelles. (Cette définition est volontairement un peu vague, mais il serait difficile, en l'occurrence, de donner une définition plus précise puisqu'il faudrait déjà savoir ce que c'est qu'une courbe, ce qui n'est pas évident:-) Montrer que les coniques sont unicursales, que les courbes d'équation* $y^2 = x^3$, $y^2 = x^3 + x^2$ *et* $y^2 = x^3 - x^2$ *sont unicursales (ce qui donne une idée du flou dans la définition). Montrer que la courbe (dite "de Fermat") d'équation* $x^n + y^n = 1$ *n'est pas unicursale (si possible, sans utiliser le grand théorème de Fermat-Wiles — mais il est intéressant de voir le rapport avec ce théorème). Plus difficile: montrer que la courbe d'équation* $y^2 = x^3 - 432$ *n'est pas unicursale, en utilisant le résultat précédent (pour cela, on fera le changement de variable* $x = 12/(u + v)$ *et* $y = 36(u - v)/(u + v)$*).*

Remarque: En fait, une courbe algébrique (c'est-à-dire définie par des équations polynômiales commes ici) non singulière (c'est-à-dire ne comportant aucun point de rebroussement (contrairement à $y^2 = x^3$) ou point double (contrairement à $y^2 = x^3 + x^2$), même pas à l'infini (contrairement à $y = x^3$ qui a un point de rebroussement à l'infini sur l'axe imaginaire) ou plus ou moins complexe (contrairement à $y^2 = x^3 - x^2$ qui a un point double en $(0, 0)$, mais ça ne se voit pas trop parce que les deux tangentes sont imaginaires)) est unicursale si et seulement si c'est une conique, i.e.une courbe de degré 2. Plus précisément, une courbe algébrique non singulière de degré d est de genre $g = (d-1)(d-2)/2$, c'est-à-dire que le lieu de ses points complexes (une surface dans $\mathbb{C}^2$ plus des points à l'infini) est homéomorphe à un tore à g trous. Le cas du degré 3 donne les courbes de genre 1, ou tores complexes, appelés également courbes elliptiques, comme ci-dessus $y^2 = x^3 - 432$.

Théorème de Féjer. *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction continue et* 2π*-périodique. On appelle* S_n *les sommes partielles de sa série de Fourier et* $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k$ *leurs moyennes de Cesàro. Montrer que* T_n *converge uniformément vers* f*.*

Démarche: Écrire $T_n(x)$ comme la convolée $\int_0^{2\pi} f(t)\, k(x-t)\, dt$ de f et d'une fonction k, appelée noyau de Féjer; montrer que le noyau de Féjer est positif, d'intégrale 1 sur une période, et qu'il converge dans un sens à préciser vers la distribution δ (autrement dit qu'il présente un pic central qui devient de plus en plus proéminent).

Berk. *Soit* (a_n) *une suite de carré sommable. Montrer que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_n a_p}{n+p+1} \leq \pi \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$$

Démarche: On peut se ramener à prouver l'inégalité pour une suite finie. On prend alors $P(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ un polynôme. Le membre de gauche de l'inégalité s'interprète alors comme $\int_0^1 P(t)^2\,dt$, et le membre de gauche, par Parseval, vaut $\int_0^\pi |P(e^{i\theta})|^2\,d\theta$. On utilise alors l'égalité magique

$$\int_{-1}^{1} Q(t)\,dt = -i\int_0^\pi Q(e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta$$

(vraie pour tout polynôme Q) qui se démontre par linéarité à partir des monômes (et qui est en fait une formule générale de l'analyse complexe).