Exercices de khôlle pour la MP*
Année scolaire 1997-1998

Dix-septième semaine (séries entières)

(et aussi “géométrie réelle en dimension 3” mais je ne sais pas ce que c'est)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Sommation d'une série divergente. *On se propose d'attribuer une valeur à la somme de la série divergente* $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k!$*. Pour cela, on introduit la série formelle* $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k! x^{k+1}$*. Montrer que cette série formelle vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynômiaux, que l'on précisera. Montrer que cette équation différentielle a une solution unique* $\tilde{f}$ *de classe* C^∞ *sur* $[0;+\infty[$ *et vérifiant* $\tilde{f}(0) = f(0)$*. Montrer que* f *est le développement de Taylor de* $\tilde{f}$ *à l'origine (mais bien sûr,* $\tilde{f}$ *n'est pas la seule fonction de classe* C^∞ *sur* $[0;+\infty[$ *ayant ce développement de Taylor). Expliquer brièvement pourquoi* $\tilde{f}$ *s'étend en une fonction analytique unique sur* $\mathbb{C}\backslash]-\infty;0]$ *(ceci demande quelques connaissances d'analyse complexe). En fin de compte, quelle valeur attribuer à* $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k!$ *?*

> **Remarque :** La formule $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k k! = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v}}{1+v}\,dv$ se trouve déjà chez Euler (De seriebus divergentibus, Leonardi Euleri Opera omnia, I. 14, Teubner, Leibzig-Berlin, 1925, p.601–602) qui propose plusieurs méthodes pour “démontrer” cette égalité (il faut dire qu'Euler ne disposait pas d'une définition d'une série convergente — celle-ci n'a été formulée que par Cauchy, Abel et Weierstraß — donc il n'avait pas certaines des inhibitions qu'on peut avoir en taupe :-). Pour obtenir une démonstration rigoureuse (et une “explication”) du fait que ces méthodes donnent bien le même résultat, il faut attendre la théorie de Gevrey : brièvement, la théorie de Gevrey permet de relier une fonction holomorphe définie sur un secteur du plan complexe à des séries formelles dont les coefficients ont une croissance en, au plus, une puissance d'une factorielle. Sur un secteur d'angle suffisamment petit (en fonction de la croissance des coefficients) il y aura existence de la fonction mais non nécessairement unicité (comparer avec le théorème de Borel, qui donne l'existence d'une somme C^∞ d'une série formelle quelconque, mais non unicité — il s'agit en quelque sorte du cas d'ouverture nulle du secteur) alors que sur un secteur assez grand (comme ici d'ouverture 2π) il y a unicitié de la somme si elle existe (ce qui est le cas le plus intéressant).

Srinivasa Ramanujan in memoriam. *On appelle fonction de partition la fonction* p *qui a un naturel* n *associe le nombre d'écritures possibles* $n = \sum_i k_i$ *avec* k_i *des naturels non nuls, l'ordre étant indifférent (ainsi,* $p(0) = 1$*,* $p(1) = 1$*,* $p(2) = 2$ *car* $2 = 2 = 1 + 1$*,* $p(3) = 3$ *car* $3 = 3 = 1+2 = 1+1+1$*). On considère la série entière* $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n)\, z^n$*. Montrer que* F *a pour rayon de convergence 1 et que* $F(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 - z^k)^{-1}$ *pour tout* z *tel que* $|z| < 1$*.*

> **Remarque :** G. H. Hardy et S. S. Ramanujan ont montré en 1918 en étudiant finement la fonction F que
>
> $$p(n) = \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + o(1)\right) \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}$$

On murmure que Ramanujan avait intuité cette formule... La méthode de démonstration est une "méthode du cercle" (G. H. Hardy, J. E. Littlewood, S. S. Ramanujan) : on sait que les coefficients $p(n)$ peuvent se retrouver en intégrant $F(z)$ sur un cercle autour de l'origine ; on divise alors le cercle en "arcs majeurs" et "arcs mineurs" selon qu'ils sont proches ou loin des rationnels ; les arcs mineurs occupent presque tout le cercle mais leur contribution à l'intégrale est négligeable, et ce sont les arcs majeurs qui apportent les termes essentiels. La méthode du cercle combinée aux fonctions génératrices permet de résoudre beaucoup de problèmes du même genre, par exemple le problème de Waring (pour tout n il existe $g(n)$ tel que tout naturel soit somme de au plus $g(n)$ puissances n-ièmes de naturels), lequel avait été démontré antérieurement, et par des méthodes beaucoup plus élémentaires, par D. Hilbert.

Étude d'un anneau hensélien régulier. *On considère l'anneau $A = \mathbb{C}\{z\}$ des séries entières (autour de l'origine) ayant un rayon de convergence non nul. Montrer qu'il s'agit d'un anneau intègre et déterminer ses éléments inversibles. Montrer que A a un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ (un idéal est dit maximal lorsqu'il est maximal pour l'inclusion parmi les idéaux propres) — on dit alors que A est un anneau local — et déterminer tous les idéaux de A. Montrer que A est noethérien, c'est-à-dire que toute suite croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de A est stationnaire. Décrire le corps des fractions K de A. Montrer que A est un anneau de valuation, c'est-à-dire que pour tout $f \in K^\times$ on a soit $f \in A$ soit $f^{-1} \in A$. On définit une distance sur A en posant $d(f,g) = e^{-n}$ où n est l'ordre d'annulation de $g - f$ en 0 (c'est-à-dire l'exposant du plus petit terme non nul de $g - f$, et c'est-à-dire encore le plus grand n tel que $g - f \in \mathfrak{m}^n$), avec la convention $d(f,f) = 0$. Montrer qu'il s'agit bien d'une distance (et même elle est ultramétrique). Montrer que A n'est pas complet pour cette distance (c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite de Cauchy dans A qui ne converge pas). Montrer cependant que A est hensélien, ce qui signifie : si $P \in A[X]$ est unitaire et que $\bar{P} = \tilde{Q}\tilde{R}$ dans $\mathbb{C}[X]$ avec $\tilde{Q}, \tilde{R}$ unitaires et premiers entre eux (où $\bar{P}$ est le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ obtenu en réduisant tous les coefficients de P modulo $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire en prenant leur valeur à l'origine) alors il existe $Q, R \in A[X]$ unitaires tels que $P = QR$ et $\bar{Q} = \tilde{Q}$ et $\bar{R} = \tilde{R}$. Bravo pour l'endurance !*