Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Seizième semaine (géométrie plane ; séries ; séries entières)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Cyborhizoextraction matricielle*. *Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M - I_n$ soit nilpotente. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N^3 = M$.*

Sommations abéliennes des séries divergentes. *Soit (λ_n) une suite (ponctuellement) décroissante de fonctions positives sur $[0, 1]$ tendant vers 1 en 0. Soit (Σa_n) une série réelle. Pour $t > 0$, on pose, si cela a un sens,*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \lambda_n(t)$$

On dit que la série (Σa_n) est "sommable par la méthode abélienne définie par (λ_n)" lorsque (i) $f(t)$ existe pour t assez petit, et (ii) $\lim_{t\to 0} f(t)$ existe. Dans ce cas, $\lim_{t\to 0} f(t)$ s'appelle la somme de la série (Σa_n) pour la méthode abélienne.

1) *Montrer que si (Σa_n) est convergente alors elle est sommable pour toute méthode abélienne, et que sa somme est bien la somme prédite par la méthode abélienne.*
2) *Montrer que les méthodes abéliennes de sommation ne présentent aucun intérêt pour les séries à termes positifs, c'est-à-dire qu'elles somment exactement les séries (absolument) convergentes.*
3) *On suppose que les sommes partielles de (Σa_n) ne sont ni majorées ni minorées : montrer qu'il existe alors une méthode abélienne qui somme (Σa_n) et que de plus on peut lui donner n'importe quelle somme réelle par ce procédé.*
4) *On pose $\lambda_n(t) = e^{-tn}$: utiliser cette méthode abélienne pour sommer $(\Sigma(-1)^n)$ puis $(\Sigma(-1)^n n)$. Cette méthode de sommation s'appelle méthode d'Abel : pourquoi ?*

> **Remarque :** La méthode $\lambda_n(t) = e^{-t\,n\,\log n}$ s'appelle méthode de Lindelöf : elle somme les séries entières sur leur "étoile de Mittag-Leffler", c'est-à-dire le plus grand ouvert étoilé autour de l'origine sur lequel il existe un prolongement analytique. Par exemple, la méthode de Lindelöf somme $(\Sigma(-2)^n)$, laquelle a pour somme $\frac{1}{3}$ (comme on le voit en introduisant -2 dans la formule $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$). La méthode $\lambda_n(t) = e^{-t\,n\,\log n\,\log\log n}$ s'appelle méthode de Hardy-Jurkat, et elle est beaucoup plus puissante, puisqu'elle somme les séries multisommables au sens de Gevrey, par exemple $(\Sigma(-1)^n n!)$, qui a pour somme $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+u}$. On peut encore utiliser des méthodes plus "brutales" comme $\lambda_n(t) = e^{-tn^\alpha}$, mais de manière générale, plus une méthode somme des séries fortement divergentes moins elle en sommera des faiblement divergentes (en particulier, les séries entières dans leur étoile de Mittag-Leffler).

Théorème taubérien faible. *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière telle que $a_n = o(1/n)$. On suppose que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to 1^-$. Montrer que $(\sum a_n)$ converge et que sa somme est ℓ.*

---

* Il s'agit, naturellement, de l'art d'extraire les racines cubiques des matrices.

Bis repetita placent. *Donner un équivalent lorsque* $x \to 1^-$ *de* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

Formule de Cauchy et théorème de Liouville. *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Montrer que pour tout* $r < R$ *on a* $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$. *En déduire qu'une série entière de rayon de convergence infini et bornée sur* $\mathbb{C}$ *est constante.*

Théorème de Borel. *On admet l'existence d'une fonction* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *à support compact et valant 1 sur un voisinage de l'origine. Montrer que pour toute série formelle* $(\Sigma a_n x^n)$ *il existe une fonction* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *dont c'est la série de Taylor à l'origine.*

Exercice à stûsss. *Pour tout naturel* n *on note* b_n *le nombre de chiffres 1 dans l'écriture binaire de* n. *Calculer la somme de la série* $(\Sigma \frac{b_n}{n(n+1)})$.

Exercice distrayant. *Montrer que la somme des* $\frac{1}{n}$ *où* n *parcourt l'ensemble des entiers dans l'écriture décimale desquels ne figure pas le chiffre 3, est convergente (et accessoirement encadrer cette somme).*