Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Quinzième semaine (géométrie plane ; séries)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Exercice facile. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels. Montrer que le support $\{i \in I: x_i \neq 0\}$ de la famille est dénombrable.*

Résultat intéressant. *Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que pour toute série (Σa_n) convergente la série $(\Sigma f(a_n))$ soit encore convergente : montrer que f est linéaire au voisinage de 0 (c'est-à-dire que f coïncide, sur un voisinage de 0, avec une application linéaire).*

Exercice pour épater la gallerie. *Quelle est la nature de la série $(\Sigma \sin((1+\sqrt{2})^n\pi))$?*

Un critère de permutation des séries. *Soit (Σu_n) une série convergente, et soit $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une permutation de $\mathbb{N}$. On suppose que $|\sigma(n) - n| \sup_{m\geq n} |u_{\sigma(m)}|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Montrer que la série $(\Sigma u_{\sigma(n)})$ est convergente et a même somme que (Σu_n). [Pour cela, on considérera $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} u_k$ (avec n grand) et on introduira le plus petit h tel que $\sigma(h) > n$, de sorte que dans la différence ci-dessus il y a au moins h termes qui s'annulent.]*

> **Remarque :** Cet exercice se trouve dans Bourbaki (Topologie Générale, chapitre IV, §7, exercice 12, page 60 dans la nouvelle édition) mais avec une erreur ($|u_m|$ au lieu de $|u_{\sigma(m)}|$).

Exercice. *Pour tout naturel n non nul, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. Montrer que $\sum_{n\leq x} \sigma(n) = \frac{1}{12}\pi^2 x^2 + O(x \ln x)$. On admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.*

> **Résolution :** On a
>
> $$\sum_{n\leq x} \sigma(n) = \sum_{n\leq x} \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d\leq x} \sum_{d|n\leq x} \frac{n}{d} = \sum_{d\leq x} \sum_{m\leq x/d} m$$
>
> Or $\sum_{m\leq x/d} m = \frac{1}{2}\lfloor\frac{x}{d}\rfloor(\lfloor\frac{x}{d}\rfloor+1) = \frac{1}{2}(x/d)^2 + O(x/d)$, et $\sum_{d\leq x}\frac{1}{d^2} = \frac{\pi^2}{6} + O(1/x)$, et enfin $\sum_{d\leq x}\frac{1}{d} = O(\ln x)$. On en déduit le résultat.

Cheveu sur la soupe. *Soit a_n une suite de réels positifs. On considère la partie de ℓ^2 définie par*

$$K = \{(u_n): \forall n\ |u_n| \leq a_n\}$$

À quelle condition (nécessaire et suffisante) cette partie est-elle compacte ?

Exercice déjà donné. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points du plan, trois quelconques d'entre eux n'étant jamais alignés. On suppose que la distance entre deux quelconques des A_i est un entier. Montrer que I est fini.*