Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Quatorzième semaine (géométrie plane ; séries)

David A. Madore (david.madore@ens.fr)

Résultat intéressant. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que pour toute série (Σa_n) convergente la série $(\Sigma f(a_n))$ soit encore convergente : montrer que f est linéaire au voisinage de 0 (c'est-à-dire que f coïncide, sur un voisinage de 0, avec une application linéaire).*

Résultat surprenant. *Soit (Σa_n) semi-convergente (c'est-à-dire convergente mais non absolument convergente). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$* bijective *telle que la série $(\Sigma a_{\sigma(n)})$ converge et ait x pour somme.*

Exercice pour épater la gallerie. *Quelle est la nature de la série $(\Sigma \sin((1+\sqrt{2})^n\pi))$?*

Exercice plus facile qu'il n'y paraît. *Soit (Σu_n) une série à termes strictement positifs, convergente, de somme S. On suppose de plus que pour tout n on a $u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que pour tout $x \in [0; S]$ il existe $K \subseteq \mathbb{N}$ telle que $x = \sum_{k \in K} u_k$.*

Théorème de Mertens. *Soit (Σa_n) une série absolument convergente et (Σb_n) une série convergente. On pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (ce qui s'écrit encore $(c_n) = (a_n) * (b_n)$). Montrer que la série (Σc_n) est convergente et donner sa somme.*

Exercice déjà donné. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de points du plan, trois quelconques d'entre eux n'étant jamais alignés. On suppose que la distance entre deux quelconques des A_i est un entier. Montrer que I est fini.*