Exercices de khôlle pour la MP*
Année scolaire 1997-1998

Treizième semaine (espaces affines ; intégrales dépendant d'un paramètre)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Théorème de Carathéodory-Milman. *On rappelle le théorème de Carathéodory : si K est une partie compacte d'un espace affine de dimension finie alors $\operatorname{conv}(K)$ (son enveloppe convexe) est compact. On suppose à présent que K est une partie compacte d'un espace de Banach affine réel E (i.e. un espace affine dont le vectoriel tangent est de Banach). Montrer que $\operatorname{conv}(K)$ n'est pas nécessairement compact, même si E est de Hilbert, mais cependant que $\operatorname{conv}(K)$ est toujours précompact (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut le recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε). Montrer qu'un espace métrique précompact et complet est compact. En déduire que $\overline{\operatorname{conv}(K)}$ est compact.*

> **Remarque :** Ce théorème reste vrai dans un espace de Fréchet, voir pour cela W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*.

Théorème de Markoff-Kakutani. *Soit K une partie convexe compacte non vide d'un espace affine normé E réel (c'est-à-dire un espace affine dont le vectoriel tangent est normé). Soit Γ un ensemble d'applications affines continues de E envoyant K dans lui-même et qui commutent (deux à deux). Montrer que Γ a un point fixe dans K, c'est-à-dire qu'il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in \Gamma$.*

> **Remarque :** Ce théorème reste vrai dans un espace vectoriel topologique quelconque ; par ailleurs, il en existe une variante, le théorème de Kakutani (valable dans un espace vectoriel topologique localement convexe) dans lequel on suppose que Γ est un groupe *équicontinu* (mais plus nécessairement commutatif) d'applications affines envoyant K dans lui-même.

Théorème de Krein-Milman. *Soit E un espace de Hilbert réel affine (i.e. un espace affine dont le vectoriel tangent est de Hilbert). Si A est une partie de E, on appellera partie extrémale de A une partie S non vide de A telle que : si $x, y \in A$ et $t \in]0;1[$ vérifient $tx + (1-t)y \in S$ alors $x, y \in S$. Un point extrémal de A est un point de A dont le singleton est une partie extrémale de A. On note $\operatorname{ext}(A)$ l'ensemble des points extrémaux de A.*

Soit K un convexe compact de E. On se propose de montrer (en admettant deux petites choses) que K est l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux, c'est-à-dire $\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))}$.

a) *Une inclusion est triviale : laquelle ?*

b) *On appelle $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties extrémales compactes non vides de K. Montrer que tout élément minimal de $\mathcal{P}$ (pour l'inclusion) est un singleton.*

c) *Montrer que l'intersection d'un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{P}$ est un élément de $\mathcal{P}$ [ce qui compte surtout, c'est le "non vide"]. Ce dernier résultat est l'hypothèse nécessaire pour pouvoir appliquer le lemme de Zorn : on en déduit que toute partie de $\mathcal{P}$ contient un élément extrémal.*

d) *On admet le résultat suivant (qui est une forme très faible du théorème de Hahn-Banach) : si C est un convexe compact de E et x un point n'appartenant pas à C*

alors il existe une forme affine continue Λ sur E telle que $\Lambda(y) > \Lambda(x)$ pour tout $y \in C$. Conclure.

Remarques : 1) En dimension finie, bien entendu, grâce au théorème de Carathéodory, on a plus simplement $K = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))$; par ailleurs, dans ce cas, le théorème de Hahn-Banach est "assez" facile.

2) Le théorème énoncé ci-dessus est vrai dans un cadre beaucoup plus général que celui des espaces de Hilbert, à savoir les espaces vectoriels topologiques dont le dual est séparant.

2) Le théorème de Hahn-Banach existe sous de nombreuses formes différentes. En voici une : dans un espace de Hilbert (plus généralement, un espace vectoriel topologique localement convexe) un convexe fermé et un convexe compact disjoints peuvent être strictement séparés par un hyperplan (affine) fermé.

4) Pour ce qui est du lemme de Zorn, l'énoncé utilisé ici est : si $\mathcal{P}$ est un ensemble partiellement ordonné dans lequel tout sous-ensemble totalement ordonné a un minorant (dans $\mathcal{P}$) alors $\mathcal{P}$ a un élément minimal (et on en déduit que tout élément de $\mathcal{P}$ majore un élément minimal).

Exercice amusant. *On définit $F\colon]0;1[\to \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}$. Montrer l'existence de $\lim_{x\to 1^-}$ et la calculer [pour cela, on fera apparaître un t au numérateur et au dénominateur et on encadrera celui du numérateur entre x^2 et x]. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,dt$ [pour cela, on dérivera la fonction F].*

Valeur de $\Gamma'(1)$. *On rappelle que la constante d'Euler γ est définie comme*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

Montrer que $\Gamma'(1) = \gamma$.