Exercices de khôlle pour la MP*
Année scolaire 1997-1998

Onzième semaine (espaces hermitiens ; intégrales impropres)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Une inégalité stupide. *Soit u une fonction de classe C^2 sur $[a;b]$ (avec $a < b$) vérifiant $u(a) = u(b) = 0$ et $u(t) > 0$ pour $a < t < b$. Montrer que*

$$\int_a^b \left|\frac{u''(t)}{u(t)}\right| dt > \frac{4}{b-a}$$

Solution : Soit $\|u\|$ le maximum de u sur $[a;b]$ et $c \in]a;b[$ tel que $u(c) = \|u\|$. On a $u'(c) = 0$. Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire $u(c) = (c-a)u'(t_1)$ avec $t_1 \in]a;c[$ et de même $u(c) = (c-b)u'(t_2)$ avec $t_2 \in]b;c[$. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|\frac{u''(t)}{u(t)}\right| dt &> \frac{1}{\|u\|}\int_a^b |u''(t)|\, dt \\
&\geq \frac{1}{\|u\|}(|u'(c) - u'(t_1)| + |u'(t_2) - u'(c)|) \\
&\geq \frac{1}{\|u\|}(|u'(t_1)| + |u'(t_2)|) \\
&\geq \frac{1}{\|u\|}\left(\frac{\|u\|}{c-a} + \frac{\|u\|}{b-c}\right) \\
&\geq \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{4}{b-a}
\end{aligned}$$

(la dernière inégalité est la comparaison entre moyenne arithmétique et moyenne harmonique).

Théorème ergodique de von Neumann. *Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert (réel ou complexe).*

1) *Soit $T\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ une application linéaire (continue) de norme inférieure ou égale à 1 (on dit que T est une contraction). Montrer que pour tout $x \in \mathfrak{H}$ on a $x = Tx$ ssi $x = T^*x$ (ici, bien sûr, T^* désigne l'adjoint de T).*
2) *Soit $\mathfrak{T}$ une famille de contractions de $\mathfrak{H}$. On définit $F = \bigcap_{T\in\mathfrak{T}} \ker(T-1)$ et N le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{H}$ engendré par les $Tx - x$ pour $x \in \mathfrak{H}$. Montrer que l'adhérence $\bar{N}$ de N est l'orthogonal de F.*
3) *Soit T une contraction et P la projection orthogonale sur $\ker(T-1)$. Montrer que pour tout $x \in \mathfrak{H}$ la suite $\frac{1}{n}(x + Tx + \cdots + T^{n-1}x)$ converge vers Px.*

Solution : 1) On suppose $Tx = x$. Alors on a $\|Tx - x\|^2 = 0$ soit $\|Tx\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(Tx|x) = 0$. Comme $\|Tx\| = \|x\|$ et que $\|T^*x\| \leq \|x\|$ puisque $\|T^*\| = 1$, on a donc $\|T^*x\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|T^*x) \leq 0$, soit $\|T^*x - x\|^2 \leq 0$ et donc $T^*x = x$.

2) On vérifie en deux coups de cuiller à pot (en utilisant la question précédente) que si $x \in F$ alors $x \in N^\perp$, et réciproquement que si $x \in N^\perp$

alors $x \in F$. Ainsi, $F = N^\perp$, ou, ce qui revient au même, $\bar{N} = F^\perp$ (remarquez que F est *fermé*).

3) D'après la question précédente, il s'agit de montrer que si $x \in \bar{N}$ alors $\frac{1}{n}(x + Tx + \cdots + T^{n-1}x)$ converge vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in \mathfrak{H}$ tel que $\|x - x'\| < \varepsilon$ où $x' = Ty - y$. On a $\frac{1}{n}(x' + Tx' + \cdots + T^{n-1}x') = \frac{1}{n}(T^n y - y)$, qui converge vers 0 (puisque $\|T^n y\| \leq \|y\|$). Par conséquent, pour n assez grand on a $\|\frac{1}{n}(x' + Tx' + \cdots + T^{n-1}x')\| < \varepsilon$ et alors $\|\frac{1}{n}(x + Tx + \cdots + T^{n-1}x)\| < 2\varepsilon$ d'où le résultat.

Exercice rigolo. *Donner un équivalent, quand $t \to 1^-$ de*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$$

Solution : On a (pour $t > 0$ disons) $f(e^{-t^2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 t^2}$. Or puisque $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}/2$ et en utilisant un encadrement trivial, on voit que $\lim_{t\to 0} t \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 t^2} = \sqrt{\pi}/2$, soit $f(e^{-t^2}) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2t}$ lorsque $t \to 0^+$. Ainsi, $f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$.

Exercice bébête. *Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de carré intégrable. Montrer que $\int_0^x f(t)\, dt = o(\sqrt{x})$.*

Solution : Soit x_0 tel que $\int_{x_0}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt < \varepsilon^2$. On a alors, par Cauchy-Schwarz appliqué à f et 1, $\int_{x_0}^x |f(t)|\, dt < \varepsilon\sqrt{x}$. Ainsi, $\int_0^x |f(t)|\, dt < \varepsilon\sqrt{x} + \int_0^{x_0} |f(t)|\, dt$ et pour x assez grand le second terme est $< \varepsilon\sqrt{x}$ donc $\int_0^x |f(t)|\, dt < 2\varepsilon\sqrt{x}$.

Exercice modérément taubérien. *Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et (absolument) intégrable et telle que f' soit bornée. Montrer que $f(x) \to 0$. Dans le même genre : on suppose cette fois que $\int_0^x f(t)\, dt$ est bornée quand $x \to +\infty$ et que $f'(x) \to 0$, montrer le même résultat.*

Solution : Première partie : Supposons $|f'(x)| \leq N$ partout. Pour A assez grand, on a $\int_A^{+\infty} |f(x)| < \varepsilon$. Or si $h > 0$, sur l'intervalle $[A; A+h]$ on a $|f(x)| \geq |f(A)| - hN$ par le théorème des accroissements finis. Ceci donne $\int_A^{A+h} |f(x)| \geq h|f(A)| - h^2 N$. En choisissant h pour que cette expression soit maximum, soit $h = \frac{|f(A)|}{2N}$, on voit que $\varepsilon > \frac{|f(A)|^2}{4N}$, donc $|f(A)| \leq \sqrt{4N\varepsilon}$ (pour tout A suffisamment grand). Or ceci peut être rendu arbitrairement petit.

Deuxième partie : Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour des valeurs arbitrairement grandes de A on ait par exemple $f(A) > \varepsilon$. Or pour tout $h > 0$, pour x suffisamment grand on a $|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2h}$, et alors on peut trouver un intervalle $[A; A+h]$ tel que dessus $f(x) > \varepsilon/2$, ce qui donne alors $\int_A^{A+h} f(t)\, dt > h\varepsilon/2$. Alors, si M est réputé borner $\int_0^x f(t)\, dt$ pour tout x, on a certainement $h\varepsilon/2 < 2M$, ce qui est manifestement stupide pour h assez grand.