Exercices de khôlle pour la MP*

Année scolaire 1997-1998

Dixième semaine (espaces euclidiens ; intégrale simple)

David A. Madore (`david.madore@ens.fr`)

Transcendance de e. *On rappelle qu'on appelle transcendant un nombre qui n'est pas racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Le but de cet exercice est de montrer que le nombre e est de ce type.*

1) Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ de degré m ; on pose

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u)\,du$$

Montrer en intégrant par parties que

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t)$$

2) Si $\bar{f}$ est le polynôme obtenu en remplaçant chaque coefficient de f par sa valeur absolue, montrer que $|I(t)| \leq |t| e^{|t|} \bar{f}(|t|)$.

3) On suppose par l'absurde que

$$Q(e) = q_0 + q_1 e + \cdots + q_n e^n = 0$$

Soit p un grand nombre premier, et $f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p$. On pose alors $J = q_0 I(0) + q_1 I(1) + \cdots + q_n I(n)$. Montrer que $J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(j)}(k)$.

4) Montrer que J est divisible par $(p-1)!$ mais pas par $p!$. En déduire une minoration de $|J|$.

5) Montrer d'autre part que $|J| \leq C^p$ pour une certaine constante C indépendante de p.

6) En déduire une contradiction.

Irrationnalité de π. *On se propose de démontrer que le nombre π est irrationnel. Pour cela, on suppose par l'absurde que $\pi = a/b$. Posons $p_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (bx-a)^n$ et $I_n = \int_0^\pi p_n(x) \sin x\,dx$.*

1) Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

2) Montrer que p_n et ses dérivées successives prennent des valeurs entières en 0 et π.

3) Montrer que I_n est entier pour tout n.

4) Conclure.

Théorème de Riemann-Lebesgue. *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que*

$$\int_a^b f(t)\, e^{int}\,dt \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

Lemme de van der Corput. *Soient* $\lambda > 0$, $a < b$ *réels, et* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *telle que* $f'' \geq \lambda$. *Montrer qu'il existe une constante* C *ne dépendant ni de* f *ni de* a *ni de* b *ni de* λ *telle que*

$$\left| \int_a^b e^{if(t)}\, dt \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$$

(Étapes : Expliquer comment on peut se ramener à $a = 0$ *et* $f'(0) = 0$. *On considère alors* $\int_0^b e^{if(t)} dt$. *Intégrer par parties sur* $[x; b]$ *en faisant apparaître* $if'(t)$ *au numérateur et au dénominateur. Estimer l'intégrale, et choisir* x *judicieusement. Conclure.)*

Une convolution. *Soient* $\varphi, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *des fonctions continues avec* $\varphi \geq 0$ *sur* $[a; b]$. *On suppose de plus que* φ *atteint sa borne supérieure en un seul point* $c \in [a; b]$. *Montrer qu'alors*

$$\frac{\int_a^b \varphi(x)^n\, g(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx} \to g(c)$$

Démonstration complète (car cet exercice est à connaître absolument) **:** Supposons $\varphi(c) = M$, de sorte que $\varphi(x) < M$ si $x \neq c$. Posons $h(x) = g(x) - g(c)$ et $I_n = \dfrac{\int_a^b \varphi(x)^n\, g(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx}$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Soit $\eta > 0$ tel que si $|x - c| \leq \eta$ alors $|h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (ce qui est possible par continuité de g). Posons de plus $N = \sup_{[a;b]} |h|$ et $M' = \sup_{[a;b]\setminus]c-\eta;c+\eta[} \varphi$. Puisque $[a; b]\setminus]c-\eta; c+\eta[= [a; c-\eta] \cup [c+\eta; b]$ (du moins si η est assez petit, ce qu'on peut toujours supposer), φ atteint la valeur M', et donc $M' < M$. On pose alors $M'' = \frac{M+M'}{2}$ (ou, du reste, n'importe quel réel strictement compris entre M et M'). Soit enfin $\delta > 0$ tel que si $|x - c| \leq \delta$ alors $\varphi(x) \geq M''$ (ce qui est possible par continuité de φ). On a

$$I_n = g(c) + \frac{\int_{c-\eta}^{c+\eta} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx} + \frac{\int_{\text{ailleurs}} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx}{\int_a^b \varphi(x)^n\, dx}$$

Appelons I'_n le second terme et I''_n le troisième (bien sûr, $\int_{\text{ailleurs}}$ signifie ici $\int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta}^b$). Puisque $|h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sur $[c - \eta; c + \eta]$, on a $|I'_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour estimer I''_n, on note tout d'une part que

$$\left| \int_{\text{ailleurs}} \varphi(x)^n\, h(x)\, dx \right| \leq N(b - a)(M')^n$$

et de l'autre que

$$\int_a^b \varphi(x)^n\, dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \varphi(x)^n\, dx \geq 2\delta(M'')^n$$

Par conséquent, on a

$$|I''_n| \leq \frac{N(b-a)}{2\delta}\lambda^n$$

où $\lambda = M'/M'' < 1$. Mais alors $\lambda^n \to 0$ et il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ alors $|I''_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que si $n \geq n_0$, on a $|I_n - g(c)| \leq |I'_n| + |I''_n| \leq \varepsilon$; et donc $I_n \to g(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

Moyennes d'une fonction. *Soit $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x avec $m > 0$. Posons $S(t) = [\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^t\,dx]^{1/t}$.*

1) Trouver $\lim_{t\to 0} S(t)$ (on utilisera un développement limité de $f(x)^t$).

2) Trouver $\lim_{t\to+\infty} S(t)$ (on considérera un petit intervalle autour du maximum).

3) Trouver $\lim_{t\to-\infty} S(t)$.