Exercices de khôlle pour la MPSI

Neuvième semaine

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Statistiques jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.53 ± 0.42. Écart type : 2.93. Meilleure note : 20. Plus mauvaise note : 09.)

Exercice important. *Montrer que l'application*

$$\begin{aligned}\varphi : &\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ &x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x > 0\\ &x \mapsto 0 \text{ si } x \leq 0\end{aligned}$$

est de classe C^∞. Donner un exemple d'application C^∞ à support compact (i.e. nulle en dehors d'un intervalle borné).

Contre-exemple fondamental. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est pas de classe C^1.

Exercice facile. *Trouver la limite en 0 de :*

$$\frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\ln(1+x)}$$

Exercice faisable. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $|f(x)| \leq \alpha x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.*

Fonctions réglées. *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ (i.e. un intervalle fermé borné). On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est réglée ssi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\theta : I \to \mathbb{R}$ en escalier telle que $|f(x) - \theta(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$ (f est dite "uniformément approchée par les fonctions en escalier").*

1) *Montrer que toute fonction continue est réglée (c'est du cours).*
2) *Montrer que toute fonction croissante est réglée.*
3) *Montrer que f est réglée ssi elle admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche.*
4) *Montrer que si f est réglée alors il existe une suite (u_n) telle que si f n'est pas continue en x alors $x = u_n$ pour un certain n (on dit que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable ; en particulier, f ne peut pas être discontinue en tout point).*

Contre-exemple important. *Montrer que la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas suffisante pour qu'une fonction soit continue (comme on l'a cru avant Darboux).*

Polynômes de Hermite. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée n-ième s'écrit $f^{(n)} = H_n f$ où H_n est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant. (Ces polynômes se nomment polynômes de Hermite, en l'honneur du mathématicien français Charles Hermite (1822-1901)).*

Exercice piège. *Calculer la dérivée de la fonction*

$$x \mapsto \ln \cos \left(\pi + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

(Bon, d'accord, c'est un peu gros, mais enfin, il faut tout de même rester réveillé...)