Exercices de khôlle pour la MPSI

Huitième semaine

David A. Madore

`david.madore@clipper.ens.fr`

`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

Exercice pas trop difficile. *Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans lui-même telle que $f(x)$ soit toujours colinéaire à x (i.e. $f(x) = \lambda x$ pour tout x, avec λ dépendant a priori de x) ; montrer que f est une homothétie (i.e. $f(x) = \lambda x$ pour tout x, avec λ ne dépendant pas de x).*

Contre-exemple archi-rabaché. *Trouver, pour tout N, un exemple de N sous-espaces vectoriels E_i d'un même espace vectoriel, tels que deux quelconques des E_i soient en somme directe, mais pas tous les E_i.*

Contre-exemple idiot. *Donner un exemple d'une application linéaire injective mais non bijective d'un espace vectoriel dans lui-même.*

Exercice sur les projecteurs. *Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses projecteurs. Montrer que la relation $\leq$ sur $\mathcal{P}$ définie par*

$$p \leq q \iff (pq = p \wedge qp = p)$$

est une relation d'ordre et la caractériser en termes d'images et de noyaux.

Exercice important (et facile). *Soit E un espace vectoriel, $E = E_1 \oplus E_2$. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $A \supseteq (A \cap E_1) \oplus (A \cap E_2)$, mais qu'on n'a pas nécessairement égalité.*

Exercice pitoyable. *Résoudre le système*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ t + x = 0 \end{cases}$$

Exercice pas si facile. *Soient u, v deux applications linéaires d'un espace vectoriel E dans lui-même. On suppose que $\mathrm{id} + uv$ est bijective. Montrer que $\mathrm{id} + vu$ est bijective.*

Questions multiples. *L'image/l'image réciproque d'une famille libre/d'une famille génératrice/d'une base par une application linéaire quelconque/injective/surjective/bijective est elle une famille libre/une famille génératrice/une base ?*