Exercices de khôlle pour la MPSI

Septième semaine

David A. Madore
`david.madore@clipper.ens.fr`
`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

Exercice difficile. *Soit G un groupe fini et $\varphi\colon G \to G$ un morphisme involutif (i.e. tel que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$) sans point fixe non trivial (i.e. tel que $\varphi(x) = x$ implique $x = 1$). Montrer que G est abélien.*

> **Indication :** On pourra montrer que tout élément de G s'écrit $t\varphi(t^{-1})$ pour un certain $t \in G$, puis que $\varphi(x) = x^{-1}$ pour tout x.

Exercice plutôt facile. *Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que la famille*

$$\ln 2, \ln 3, \ln 5, \ln 7, \ldots$$

est libre sur $\mathbb{Q}$ (i.e. est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$; si on ne sait pas ce que "libre" signifie pour une famille infinie, on pourra montrer que toute sous-famille finie est libre).

Exercice classique. *Montrer qu'un groupe n'est jamais la réunion de deux sous-groupes propres. En déduire que si un anneau vérifie $xy = \pm yx$ pour tous x, y (le choix du signe dépendant de x et de y) alors il est commutatif.*

Autre exercice classique. *On dit qu'un anneau commutatif A est* <u>intègre</u> *ssi pour tous $x, y \in A$, $xy = 0$ implique $x = 0$ ou $y = 0$. Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.*

Exercice trivial (en principe). *Soit G un groupe, et $x \in G$. Montrer qu'il existe un unique morphisme $\varphi\colon \mathbb{Z} \to G$ tel que $\varphi(1) = x$.*

Un résultat horriblement important. *Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $m\mathbb{Z}$ pour un certain naturel m.*

Exercice très classique. *Soit A un anneau dans lequel tout x vérifie $x^2 = x$. Montrer que A est commutatif.*

> **Remarque :** Un tel anneau s'appelle un anneau de Boole.

Exercice très difficile. *Si A est un anneau, $x \in A$, on dit qu'un $y \in A$ est un* <u>inverse à droite</u> *de x ssi $xy = 1$. Montrer que si x admet au moins deux inverses à droite, il en admet une infinité.*

Exercice complètement stupide. *On munit $\mathbb{R}^3$ de la loi de composition suivante :*

$$(x, y, z) \star (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$$

Montrer que cela définit une structure de groupe.

Exercice atrocement classique. *Soit E un espace vectoriel sur un corps K infini. Montrer que la réunion d'une famille finie de sous-espaces vectoriels propres de E ne peut pas être E.*

Exercice facile. *Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: montrer que la famille*

$$(t \mapsto e^{\lambda t})_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

y est libre (si on ne sait pas ce que "libre" signifie pour une famille infinie, on pourra montrer que toute sous-famille finie est libre).

Exercice totalement stupide (mais alors, vraiment). *Déterminer tous les $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$.*