Exercices de khôlle pour la MPSI

Sixième semaine

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

Exemples intéressants. *Donner un exemple de fonction réelle continue en un seul point. Donner un exemple de fonction réelle continue sur les irrationnels et discontinue sur les rationnels.*

> **Remarque :** Il n'existe pas de fonction réelle continue sur les rationnels et discontinue sur les irrationnels.

Limite simple versus limite uniforme. *Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to f(x)$, soit*

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Montrer que ceci n'implique pas que f est continue. Montrer en revanche que si on remplace la condition ci-dessus par

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0\, \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(on dit que $f_n \to f$ uniformément par rapport à x) alors f est continue.

Continuité uniforme. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est <u>uniformément continue</u> ssi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$, $|x - y| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Montrer qu'une fonction uniformément continue est continue, qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue, mais que les implications réciproques sont fausses en général. Montrer que si l'intervalle I est ouvert borné, et f uniformément continue sur I, alors elle se prolonge par continuité aux bornes de I.*

Le trio classique. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que deux parmi les trois assertions suivantes impliquent la troisième :*
(i) *f est continue.*
(ii) *f est strictement monotone.*
(iii) *f est bijective sur un intervalle (i.e. injective d'image un intervalle).*

Exercice très difficile. *Trouver une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :*
(i) *$f(x)$ est rationnel pour tout rationnel x non nul.*
(ii) *$f(x)$ est irrationnel pour tout irrationnel x.*
(iii) *$f(0)$ est irrationnel.*

Critère de Cauchy sur les fonctions. *Soit $f\colon A \to \mathbb{R}$, et $a \in \bar{A}$. On dit que f est <u>de Cauchy</u> en a ssi elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \eta > 0\, \forall x \in A \cap [x - \eta; x + \eta]\, \forall y \in A \cap [x - \eta; x + \eta]\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Montrer que dans ces conditions, f admet une limite en a.

Introduction aux séries entières et aux développements limités. *Soit (a_n) une suite bornée de nombres réels. Montrer que pour tout $|x| < 1$, la série*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est convergente. Montrer que pour tout N, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + O_0(x^{N+1})$$

(c'est-à-dire $f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = O_0(x^{N+1})$).

Exercice très facile. *Comparer les fonctions*

$$t^\alpha \ , \quad e^{(\ln t)^\alpha}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ au voisinage de $+\infty$.