Exercices de khôlle pour la MPSI

David A. Madore
david.madore@clipper.ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

Exercice amusant. *On appelle ouvert une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in A$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\subseteq A$. Exemple : les intervalles ouverts sont ouverts. On joue maintenant au jeu suivant : deux joueurs, I et II s'affrontent ; chacun, tour à tour, choisit un ouvert $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide, inclus dans celui que vient de jouer le précédent. Ainsi : I choisit $A_0 \subseteq \mathbb{R}$ ouvert non vide, II choisit $B_0 \subseteq A_0$ ouvert non vide, I choisit $A_1 \subseteq B_0$ ouvert non vide, et ainsi de suite. Après un nombre infini de coups, on regarde $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$: s'il est vide, I a gagné, sinon, c'est II. Montrer que II possède une stratégie gagnante, c'est-à-dire un moyen de choisir ses coups en fonction des précédents pour gagner avec certitude. Plus dur : montrer que si l'on joue dans $\mathbb{Q}$ (la définition d'un ouvert étant la même, mutatis mutandis), alors c'est I qui possède une stratégie gagnante.*

Exercice cantorien. *Montrer qu'il n'existe pas de suite prenant toutes les valeurs réelles. Plus dur (pour des élèves n'ayant pas vu la notion d'ensemble dénombrable) : montrer qu'il en existe une prenant toutes les valeurs rationnelles.*

Exercice difficile. *Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n, où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. On suppose que (u_n) n'admet qu'une seule valeur d'adhérence λ (i.e. si une suite extraite de (u_n) converge, alors elle converge vers λ, et il y en a une qui converge vers λ). Montrer que $u_n \to \lambda$.*

Exercice assez facile. *Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles de limite $+\infty$, telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite (w_n) de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.*

Exercice bizarre. *Donner un exemple de suites u_n, v_n telles que l'on ait $u_n = O(v_n)$, mais ni $u_n = o(v_n)$ ni $v_n = O(u_n)$.*

Exercice curieux. *Soit (u_n) une suite réelle. On définit (v_n) par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et (w_n) par $w_n = v_{n+1} - v_n$. On suppose que (u_n) est bornée et (w_n) convergente. Montrer que $v_n \to 0$.*

Théorème abélien de Césaro. *Soit u_n une suite convergeant vers un réel ℓ. On pose $v_n = \frac{u_0+\ldots+u_{n-1}}{n}$. Montrer que $v_n \to \ell$. Beaucoup plus difficile, la réciproque suivante (théorème taubérien de Hardy-Littlewood) : on ne suppose plus $u_n \to \ell$, mais cette fois $v_n \to \ell$. On suppose de plus $u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n})$. Montrer que $u_n \to \ell$.*

> **Remarque :** Un théorème "abélien" est un théorème permettant de déduire du comportement asymptotique d'un objet des informations sur le comportement d'une moyenne (ici, la moyenne arithmétique). Leurs réciproques s'appellent théorèmes "taubériens", et pour pouvoir les appliquer, il faut disposer d'une condition, dite condition taubérienne, de régularité (ici, $u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n})$).

Exercice de manipulation. *Soit (u_n) une suite réelle. Montrer l'équivalence entre*
(i) Il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers λ.
(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout n_0 naturel il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - \lambda| < \varepsilon$.

(On dit dans ces conditions que λ est une valeur d'adhérence de (u_n).) Montrer que cela n'implique pas la convergence de (u_n) vers λ.

Théorème de Cauchy. *On dit qu'une suite rélle est de Cauchy ssi elle vérifie l'assertion suivante :*
(*) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 naturel tel que si $p, q \geq n_0$ alors $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy. Réciproquement, supposons (u_n) de Cauchy ;
(i) Montrer qu'elle est bornée.

(ii) Soit λ une valeur d'adhérence de (u_n) (i.e. la limite d'une suite extraite de (u_n)) : montrer que $u_n \to \lambda$.

Application : soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n^2})$. Montrer qu'elle est convergente.

Une démonstration de Bolzano-Weierstraß. *Soit (u_n) une suite réelle. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui est monotone. En déduire une démonstration du théorème de Bolzano-Weiestraß.*

Exercice curieux. *Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles non bornées. Montrer que pour tout $A > 0$ on peut trouver p, q tels que $|u_p - u_q| > A$ et $|v_p - v_q| > A$. Montrer que ce n'est pas vrai en général pour trois suites (ou plus).*

Exercice facile ("la compacité du cercle"). *Soit (u_n) une suite réelle quelconque. Montrer qu'il existe $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction de suite (i.e. une injection croissante) telle que $(\cos u_{\psi(n)})$ et $(\sin u_{\psi(n)})$ soient toutes deux convergentes.*