Exercices de khôlle pour la MPSI

David A. Madore
`david.madore@clipper.ens.fr`
`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

Exercice classiquissime. *On considère les parties G de $\mathbb{R}$ qui vérifient l'assetion suivante :*
(*) $0 \in G$ *et si* $x, y \in G$ *alors* $x - y \in G$.

(Ces parties s'appellent les sous-groupes de G.) Montrer que soit G est dense dans $\mathbb{R}$ soit il existe α tel que $G = \{k\alpha : k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice assez facile. *("La récurrence sur les réels", en fait, la connexité de $\mathbb{R}$.) On considère une partie A de $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
(i) $A \neq \emptyset$.
(ii) Si $x \in A$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\subseteq A$.
(iii) Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$, alors $x \in A$.
Montrer qu'alors $A = \mathbb{R}$.

Exercice classique astucieux. *Soit θ un nombre réel. Montrer qu'il existe une infinité de rationnels p/q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$) tels que*

$$\left\| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

On pourra pour cela considérer les parties fractionnaires de $0, \theta, \ldots, Q\theta$, et la partition $[0; \frac{1}{Q}[\cup \ldots \cup [\frac{Q-1}{Q}; 1[$ de $[0; 1[$.

Exercice facile. *Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.*

Exercice concernant l'inégalité triangulaire, mais dans le plan plutôt que dans sur les réels. *Soient $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ $2n$ points du plan, tels que trois quelconque d'entre eux ne soient jamais alignés. Montrer qu'il existe une bijection σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que pour i, j distincts, les segments $[F_i; P_{\sigma(i)}]$ et $[F_j; P_{\sigma(j)}]$ soient disjoints.*

Indication : Montrer que si A, B, C, D est un quadrilatère convexe, alors $AB + CD \leq AC + BD$.

Exercice facile. *Soit (u_n) une suite réelle, et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que la suite $(u_{\varphi(n)})$ admet une limite ssi la suite (u_n) en admet une et que, le cas échéant, ces limites sont égales.*

Exercice très (très) difficile. *Considérons pour un ensemble totalement ordonné S les propriétés suivantes :*
(i) S est <u>sans extrémités</u> : pour tout $a \in S$, il existe $b, c \in S$ tels que $b < a < c$.
(ii) S est <u>dense (dans lui-même)</u> : pour tous $a < b \in S$ il existe $c \in S$ tel que $a < c < b$.
(iii) S est <u>séparable</u> : il existe une suite (u_n) à valeurs dans S telle que pour tous $a < b \in S$ on ait $a \leq u_n \leq b$ pour un certain n.
(iv) S est <u>complet</u> : toute partie non vide et minorée de S admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Montrer que $\mathbb{R}$ vérifie ces propriétés. Réciproquement, montrer que si S vérifie ces propriétés, il existe $\varphi : S \to \mathbb{R}$ bijective et croissante.

Indication : (pour la seconde question) Commencer par construire une bijection croissante entre l'ensemble des u_n et $\mathbb{Q}$, puis la prolonger en une bijection entre S et $\mathbb{R}$.

Remarque culturelle : On peut se demander ce qu'il advient si l'on remplace la propriété (iii) par la propriété suivante, plus faible, aussi vérifiée par $\mathbb{R}$:

(iii') S vérifie la propriété de la chaîne dénombrable : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'intervalles de S non vides et deux-à-deux disjoints alors il existe une surjection $\mathbb{N}\to I$ (i.e. I est au plus dénombrable).

Les conditions (i), (ii), (iii') et (iv) permettent-elles de conclure que S est en bijection croissante avec $\mathbb{R}$? Ce problème, nommé problème de Souslin, est longtemps resté sans réponse. On sait maintenant qu'il est indécidable.

Exercice culturel. *On appelle coupure un couple (P,Q) de parties de $\mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $P\cup Q=\mathbb{Q}$.

(ii) $P\neq\emptyset$ et $Q\neq\emptyset$.

(iii) Si $x\in P$ et $y\in Q$ alors $x<y$.

(iv) Si $x\in P$ et $t<x$ alors $t\in P$.

(v) Q n'a pas de plus petit élément.

On ordonne l'ensemble $\mathcal{D}$ des coupures par $(P,Q)\leq(P',Q')$ ssi $P\supseteq P'$. Montrer qu'il existe une bijection croissante $\mathcal{D}\to\mathbb{R}$.

Remarque culturelle : C'est là un des moyens de définir les nombres réels.

Exercice facile. *Soit (u_n) une suite prenant toutes les valeurs rationnelles. Montrer que (u_n) n'admet pas de limite.*

Exercice facile. *Montrer que l'ensemble des réels de la forme $\frac{p}{2^s}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice facile. *Soit (u_n) une suite telle que $u_{2n}\to\lambda$ et $u_{2n+1}\to\lambda'$. Montrer que si $\lambda=\lambda'$ alors $u_n\to\lambda$ et que si $\lambda\neq\lambda'$ alors (u_n) n'est pas convergente.*

Exercice moyen. *Pour tout réel x, notons $\lfloor x\rfloor$ sa partie entière et $\flat x:=x-\lfloor x\rfloor$ sa partie fractionnaire. Montrer que la suite $(\flat\sqrt{n})$ n'admet pas de limite.*