Exercice de manipulation (assez difficile si on n'y est pas habitué). *I) Soient A, A' deux ensembles. On dit qu'un ensemble B et deux applications $f\colon B \to A$ et $f'\colon B \to A'$ sont solution du problème universel pour A et A' si (et seulement si) pour tout ensemble C et applications $g\colon C \to A$ et $g'\colon C \to A'$ il existe une unique application $\varphi\colon C \to B$ telle que $g = f \circ \varphi$ et $g' = f' \circ \varphi$. Les deux questions suivantes peuvent se traiter dans n'importe quel ordre : 1) Montrer qu'il existe une solution du problème universel pour A et A'. 2) Montrer que si $B, f\colon B \to A, f'\colon B \to A'$ et $D, h\colon D \to A, h'\colon D \to A'$ sont deux solutions du problème universel pour A et A', alors il existe une bijection $\psi\colon A \to D$ telle que $h = f \circ \psi$ et $h' = f' \circ \psi$. Autrement dit, la solution du problème universel est "unique à isomorphisme près". II) Soient A, A' deux ensembles qu'on choisira disjoints pour simplifier. On dit qu'un ensemble B et deux applications $f\colon A \to B$ et $f'\colon A' \to B$ sont solution du problème co-universel pour A et A' si (et seulement si) pour tout ensemble C et applications $g\colon A \to C$ et $g'\colon A' \to C$ il existe une unique application $\varphi\colon B \to C$ telle que $g = \varphi \circ f$ et $g' = \varphi \circ f'$. 1) Montrer qu'il existe une solution du problème co-universel pour A et A'. 2) Que faut-il faire si A et A' ne sont pas supposés disjoints ?*

Exercice "diagonal" (atrocement astucieux). *Soit I un ensemble ayant au moins deux éléments. Montrer que pour tout ensemble A il ne peut pas exister de surjection de A sur I^A (I^A : ensemble des applications de A vers I).*

Exercice stupide (il devrait être très facile). *I) Soient A, A' deux ensembles. Montrer que pour tout ensemble B il existe une bijection entre l'ensemble $B^{A \times A'}$ et l'ensemble $(B^A)^{A'}$. II) Soient A, A' deux ensembles disjoints. Montrer que pour tout ensemble B il existe une bijection entre l'ensemble $B^{A \cup A'}$ et l'ensemble $B^A \times B^{A'}$.*

Exercice trivial. *Soit $f\colon A \to B$ une application. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$, est une relation d'équivalence sur A.*

Exercice de manipulation de difficulté moyenne. *Soient A, A' deux ensembles partiellement ordonnés. On définit un ordre sur $A \times A'$ ("l'ordre produit") par $(x, x') \leq (y, y')$ si et seulement si $(x \leq y) \wedge (x' \leq y')$. Montrer que ceci est bien un ordre (partiel). Montrer que cet ordre peut ne pas être total même si A et A' étaient totalement ordonnés. On supposera désormais $A \times A'$ muni de cet ordre produit. Soient f, f' les surjections canoniques de $A \times A'$ sur A et A' respectivement, i.e. $f\colon (x, x') \mapsto x$ et $f'\colon (x, x') \mapsto x'$. Montrer que f et f' sont des applications croissantes (ceci est complètement évident). Montrer que l'on a la "propriété universelle" suivante : pour tout ensemble partiellement ordonné C et toutes applications croissantes $g\colon C \to A$ et $g'\colon C \to A'$ il existe une unique application croissante $\varphi\colon C \to A \times A'$ telle que $g = f \circ \varphi$ et $g' = f' \circ \varphi$.*

Exercice difficile mais intéressant. *Soient A et B deux ensembles. On suppose données une injection $f\colon A \to B$ et une injection $g\colon B \to A$. Montrer qu'il existe une bijection $h\colon A \to B$. (Indication : On construira h en utilisant f sur certaines parties et g^{-1} sur d'autres. On cherchera donc les parties sur lesquelles on doit utiliser f.) Ceci s'appelle le théorème de Cantor-Bernstein.*

Exercice de clarté mentale. *Pour tout ensemble A, on note $\mathcal{P}(A)$ son ensemble des parties. 1) Quelles implications y a-t-il entre les deux propositions suivantes : $A \subseteq B$ d'une part, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ de l'autre ? 2) Quelles implications y a-t-il entre les deux propositions suivantes : $A \in B$ d'une part, $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$ de l'autre ? 3) Quelles inclusions y a-t-il entre les deux ensembles suivants : $\mathcal{P}(A \cap B)$ d'une part, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ de l'autre ? 4) Quelles inclusions y a-t-il entre les deux ensembles suivants : $\mathcal{P}(A \cup B)$ d'une part, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ de l'autre ?*

Exercice de clarté mentale plus difficile. *Soit $f\colon E \to F$. On pose $\mathcal{S} = \{x \subseteq E\colon f^{-1}(f(x)) = x\}$ et $\mathcal{I} = \{y \subseteq F\colon f(f^{-1}(y)) = y\}$. 1) Vérifier que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{I}$ sont stables par réunion et intersecton (finies). 2) Soit $A \subseteq E$, $A' = f^{-1}(f(A))$: vérifier que A' est le plus petit élément de $\mathcal{S}$ contenant A. 3) Vérifier l'équivalence entre : (i) f est injective. (ii) pour tout $x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{S}$. (iii) $\mathcal{S} = \mathcal{P}(E)$*

(ensemble des parties de E). (iv) le seul élément X de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant $f^{-1}(f(X)) = E$ est E. 4) Énoncer et démontrer des analogues de 2) et 3) concernant $\mathcal{I}$. 5) Déterminer explicitement $\mathcal{I}$.

Exercice original et difficile. *On dit qu'un ensemble partiellement ordonné W est <u>bien ordonné</u> si et seulement si tout sous-ensemble non vide de W admet un plus petit élément. Pour tout $a \in W$, on note alors $s(a) = \{x \in W : x < a\}$ le "segment initial" de a. 1) Montrer que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné. 2) (Principe d'induction transfinie.) On suppose que W est bien ordonné, et que $A \subseteq W$ vérifie la propriété suivante : si $s(a) \subseteq A$ alors $a \in A$. Montrer que $A = W$. (Morale : A correspond a une certaine propriété ; on suppose que si tous les prédécesseurs de a ont cette propriété alors a lui-même l'a ; alors tous les éléments de W ont cette propriété.) 3) Montrer par un exemple que les ensembles totalement ordonnés ne vérifient pas tous le principe d'induction transfinie. 4) Montrer qu'un ensemble totalement ordonné vérifiant le principe d'induction transfinie est bien ordonné. 5) Application : Soit W un ensemble bien ordonné ; montrer que si $f : W \to W$ est une bijection croissante, alors f est l'identité. On dit dans ces circonstances que W est <u>rigide</u>. 6) Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné qui ne soit pas rigide. Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné rigide qui ne soit pas bien ordonné.*