Exercices de khôlle pour la MPSI

Trentième (et dernière) semaine

David A. Madore

`david.madore@ens.fr`

`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

Révisions générales

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.64 ± 0.22. Écart type : 2.77.)

Remarque : Tous les exercices suivants sont tirés du volume 104 de la Revue de Mathématiques Spéciales. Ils ont été posés aux concours communs polytechniques, aux TPE, à l'INT ou à l'IIE.

365. Soit G un ensemble muni d'une loi associative possédant un élément neutre à droite et pour laquelle tout élément a un symétrique à droite. Montrer que tout symétrique à droite est également symétrique à gauche, puis que G est un groupe.

367. Existe-t-il une matrice carrée complexe d'ordre 3 dont le carré est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

371. Un élément d'un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est-il diagonalisable ?

377. E est un espace vectoriel réel euclidien. Soit f dans $L(E)$ tel que $(f(x) \mid x) = 0$ pour tout x de E. Montrer que pour tous x, y on a $(f(x) \mid y) + (f(y) \mid x) = 0$; montrer que $\ker f = (\operatorname{im} f)^\perp$.

378. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut trouver deux points symétriques par rapport à 0 et distincts ayant même image par f. Montrer le même résultat pour deux points distincts A et B tels que l'on passe de l'un à l'autre par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de 0.

380. Quelles sont les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous x, y :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)\,f(y)}$$

390. On pose $J_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{in\vartheta}}{5+4\cos\vartheta}\,d\vartheta$.

a) Montrer que J_n est réel.

b) Établir une relation de récurrence entre J_n, J_{n-1}, J_{n-2}.

c) Calculer J_0. En déduire J_1.

d) Calculer J_n.

398. Montrer l'existence d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un intervalle entourant 0 par la relation

$$\{y = f(x); f(0) = 1; ye^x - xe^y = 1\}$$

Développer f à l'ordre 3 en 0.

415. Soient a, b des entiers > 0. Soit p un nombre premier tel que $(a+b) \wedge (ab) = p^2$ (où $\wedge$ désigne le pgcd) ; que dire de $a \wedge b$? Quels sont les (a, b) tels que $(a+b) \wedge (ab) = 49$ et $a \vee b = 231$?

424. Nature de la série $\Sigma \sin[(2+\sqrt{3})^n \pi]$.