Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingt-neuvième semaine

David A. Madore

`david.madore@ens.fr`

`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

Révisions générales

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.64 ± 0.22. Écart type : 2.77.)

Groupes d'homotopie. Soit X une partie d'un espace vectoriel normé, et $x_0 \in X$. On désigne par I l'intervalle $[0;1]$, et par $\dot{I}^n$ l'ensemble des éléments de I^n dont une composante au moins vaut 0 ou 1 (le bord). On considère des applications continues $f\colon I^n \to X$ valant x_0 sur $\dot{I}^n$. Si f et g sont deux telles applications, on dit que f et g sont homotopes ss'il existe $\Theta\colon I \times I^n \simeq I^{n+1} \to X$ continue telle que $\Theta(t,x) = x_0$ si $x \in \dot{I}^n$, que $\Theta(0,x) = f(x)$ et $\Theta(1,x) = g(x)$ pour tout x. On note $f \sim g$. Montrer que ceci définit une relation d'équivalence. On notera $[f]$ la classe d'équivalence de f pour cette relation. Si f et g sont deux applications comme ci-dessus, on définit $h = f \star g$ par

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(2x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ si } x_1 \leq \tfrac{1}{2}$$

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g(2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_n) \text{ si } x_1 \geq \tfrac{1}{2}$$

Et on pose $[f] \star [g] = [f \star g]$: vérifier que ceci a bien un sens, et que pour cette opération, l'ensemble $\pi_n(X, x_0)$ des classes d'équivalence pour $\sim$ est un groupe, abélien si $n > 1$.

Jeu d'un ouvert. Soit A une partie de $[0;1]$. On considère le jeu suivant : deux joueurs, I et II s'affrontent, et choisissent chacun tour à tour un chiffre (entre 0 et 9). Après un nombre infini de tours, on considère le réel $0,x_1x_2\ldots$ où $x_1, x_2, \ldots$ sont les chiffres qui ont été choisis. Le joueur I gagne ssi ce réel est dans A, et le joueur II dans le cas contraire. Montrer que si A est ouvert ou bien fermé, alors un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Bête exercice de classification. Trouver tous les les groupes ayant au plus 11 éléments.

Exercice plutôt difficile. On suppose qu'un élément x d'un anneau A admet strictement plus d'un inverse à gauche (un inverse à gauche de x est un y tel que $yx = 1$). Montrer qu'il en admet une infinité.