Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingt-huitième semaine

David A. Madore
`david.madore@ens.fr`
`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.65 ± 0.22. Écart type : 2.78.)

Exercice extraordinairement astucieux. On considère un rectangle R et une partition de celui-ci en rectangles de côtés entiers. Montrer que R a des côtés entiers.

Théorème de Pascal. On considère un hexagone dans lequel une conique est inscrite. Montrer que les diagonales de l'hexagone sont concourantes.

Cercle d'Euler-Feuerbach. Montrer que dans un triangle les neuf points suivants sont cocycliques :

- Les milieux des côtés.
- Les pieds des hauteurs.
- Les mileux des segments reliant l'orthocentre aux sommets.

et que de plus le cercle passant par ces neuf points est l'image du cercle circonscrit par une homothétie de centre l'orthocentre et de rapport $\frac{1}{2}$. Montrer que la droite d'Euler du triangle est un diamètre de ce cercle.

Supplice de Tantale. Calculer le volume du dodécaèdre régulier en fonction de la longueur de ses côtés.

Exercice trouvé dans un livre de vulgarisation. On considère un ensemble de points du plan, non tous alignés, tels que la distance entre deux quelconques d'entre eux soit un entier. Montrer que cet ensemble est fini.

Exercice classique. Calculer le volume de la boule unité en dimension n.

Formule de Pick. Soit P un polygône convexe du plan dont les sommets ont des coordonnées entières. On appelle $V(P)$ le nombre de points à coordonnées entières intérieurs à P, en comptant pour $\frac{1}{2}$ les points du bord (y compris les sommets), moins 1. Montrer que $V(P)$ est égal à l'aire de P.

Paradoxe de Banach-Tarski. Soient B et B' deux boules de l'espace. Montrer qu'il existe des partitions finies $B_1, \ldots, B_n$ de B et $B'_1, \ldots, B'_n$ de B' telles que pour chaque i, la partie B'_i soit l'image de B_i par un déplacement. (Autrement dit, on peut découper B en morceaux et les recoller pour obtenir B' — et ce, même si B et B' n'ont pas le même rayon !) [Non, cet exercice n'est pas très faisable.]

Centre de $O_n(\mathbb{R})$. Soit Z le centre de $O_2(\mathbb{R})$ (respectivement $O_3(\mathbb{R})$), c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $O_2(\mathbb{R})$ (respectivement $O_3(\mathbb{R})$) qui commutent à tous les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ (respectivement $O_3(\mathbb{R})$). Déterminer Z. Montrer que $O_3(\mathbb{R})$ est le produit de Z par un groupe que l'on précisera.

Quaternions. On appelle $\mathbb{H}$ l'ensemble des expressions de la forme $a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, l'addition étant définie de la manière évidente, et la multiplication étant définie par la distributivité et les règles $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Montrer que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif. On appellera quaternion un élément de $\mathbb{H}$. Le module d'un quaternion $a+bi+cj+dk$ est par définition $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Montrer que les quaternions de module 1 forment un groupe isomorphe à $SO_3(\mathbb{R})$.

Fermes et puits. Soient $F_1, \ldots, F_n, P_1, \ldots, P_n$ des points trois à trois non alignés du plan. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$) tel que les segments $[F_i P_{\sigma(i)}]$ soient deux à deux disjoints.

Théorème de Ptolémée. Le produit des longueurs d'un quadrilatère inscrit dans un cercle est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés : démontrer ce théorème (qui date du IIème siècle avant notre ère).

Géométrie du triangle. Montrer que le rayon qui joint un sommet d'un triangle au centre de son cercle circonscrit est perpendiculaire à la droite joignant les pieds des hauteurs issus des deux autres sommets.