Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingt-sixième semaine

David A. Madore

david.madore@ens.fr

http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.67 ± 0.21. Écart type : 2.58.)

Une baignoire qui se vide. Résoudre l'équation différentielle $y' = -\sqrt{y}$. Faire un commentaire quant à l'application du thórème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème faible de minoration *a priori*. Soit $y' = f(x, y)$ une équation différentielle du premier ordre (avec f de classe C^1 par exemple). On suppose que h est une solution de cette équation, définie sur un intervalle ouvert $I =]a; b[$. On suppose de plus que h reste bornée au voisinage de b ; montrer alors que h se prolonge en une solution de l'équation définie sur $]a; b + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

Théorème de projection sur les convexes. Soit C un ensemble fermé convexe d'un espace euclidien E, et soit x un point de E. Montrer que l'inf des $\|x - c\|$ pour $c \in C$ est atteint en exactement un point : on note $p(x)$ ce point. Montrer que si $c \in C$, le produit scalaire $(\,p(x) - x \mid p(x) - c\,)$ est négatif et donner une interprétation géométrique de cette inégalité. Montrer que l'application $p\colon x \mapsto p(x)$ est continue (et, plus précisément, 1-lipschitzienne).

Source : Concours d'entrée des Écoles Normales Supérieures, session 1996, épreuve commune Lyon-Cachan.

Classiques. Montrer que l'enveloppe convexe d'un ouvert (dans un espace vectoriel normé de dimension finie) est un ouvert. Ce résultat est-il vrai pour les fermés ? On rappelle que l'intérieur d'une partie est le plus grand ouvert qu'elle contient (soit l'ensemble des points dont elle est un voisinage) : montrer que l'intérieur d'un convexe est un convexe. On rappelle que l'adhérence d'une partie est le plus petit fermé qui la contient (soit l'ensemble des points qui lui sont adhérents) : montrer que l'adhérence d'un convexe est un convexe.

Théorème de Carathéodory. Soit E un espace affine (ou vectoriel) de dimension n, et $x_0, \ldots, x_m$ des points de E, avec $m > n$. Soit x un point de l'enveloppe convexe de ces $m + 1$ points. Montrer que x est dans l'enveloppe convexe de $n + 1$ parmi les $m + 1$ points. (On pourra raisonner par récurrence sur m et commencer par établir qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls tels que $\sum_i \lambda_i = 0$ et $\sum_i \lambda_i x_i = 0$.)

La première question de mon exercice d'Analyse à l'ENS Ulm. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose donnée une base $(e_i)_{i=1}^n$ telle que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n |\lambda_i| e_i \right\|$$

pour tous réels $(\lambda_i)_{i=1}^n$. Montrer que si on a $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \right\|$$

Archi-ultra-classiquissime. Soit P un polynôme complexe. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P. (Indication : Penser à la dérivée logarithmique et rendre le dénominateur réel.)