Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingt-cinquième semaine

David A. Madore
`david.madore@ens.fr`
`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.63 ± 0.22. Écart type : 2.57.)

Une démonstration du théorème de Hamilton-Cayley. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit x un vecteur de E. On veut montrer que $\chi_u(u)(x) = 0$. Pour cela, on considère la famille $x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{k-1}(x)$. Montrer que pour une certaine valeur de k, cette famille est libre et $u^k(x)$ en est combinaison linéaire. Compléter la famille en question en une base de E, écrire la matrice de u dans cette base, et conclure.

Une autre démonstration du théorème de Hamilton-Cayley. Montrer que les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ (autrement dit, si on identifie $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ à $\mathbb{R}^{2n^2}$ alors l'ensemble D des matrices diagonalisables rencontre tout ouvert non vide. Montrer que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai pour les matrices diagonalisables. En déduire qu'il est vrai pour toutes les matrices.

> **Note à moi-même :** Il faut la trigonalisation pour faire cet exercice. Mais comment peut-on faire des mathématiques sans trigonalisation ?

Réduction de Jordan des endomorphismes. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie (c'est-à-dire qu'il existe m tel que $u^m = 0$. Montrer qu'il existe une base de E sur laquelle la matrice de u prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $s_i \in \{0; 1\}$. En déduire que toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec pour blocs diagonaux les matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

avec λ valeur propre de la matrice.

> **Concernant la première question :** On trouve généralement une démonstration pénible de ce résultat dans la littérature, utilisant une famille triangulaire de sous-espaces vectoriels — ou alors la démonstration utilise des résultats sophistiqués sur les modules sur les anneaux principaux. Monsieur Mollier (professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis le Grand) propose la démonstration, simple et élégante, suivante : Montrer tout d'abord le lemme suivant : si $u^m = 0$ et $u^{m-1}(x) \neq 0$ alors la famille $x, u(x), \ldots, u^{m-1}(x)$ est linéairement indépendante. Pour faire une récurrence sur la dimension de E, il reste alors à trouver un supplémentaire stable par u de l'espace engendré par ces vecteurs. Pour cela, on choisit une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(u^{m-1}(x)) \neq 0$, et on applique de nouveau le lemme à φ et ${}^t u \colon E^* \to E^*, \lambda \mapsto \lambda \circ u$.

Exercice dont je ne sais pas s'il est faisable. On rappelle que si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel normé complexe E de dimension finie, on définit sa norme $\|u\|$ par

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

On rappelle par ailleurs qu'il s'agit bien là d'une norme sur $L(E)$, et que de plus on a $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$ pour tous $u, v \in L(E)$. Par ailleurs, on définit le rayon spectral de u, noté $\|u\|_{\mathrm{s}}$, comme le plus grand module d'une valeur propre de u. Montrer que

$$\|u\|_{\mathrm{s}} = \lim_{n \to +\infty} \|u^n\|^{1/n}$$

(formule du rayon spectral).

Semisimplicité. Soit T un endomorphisme d'un espace vectoriel E complexe de dimension finie. On dit que T est semisimple ssi tout sous-espace vectoriel de E stable par T admet un supplémentaire stable par T. Montrer que T est semisimple ssi T est diagonalisable. Ce résultat demeure-t-il vrai dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$.

> **Note à l'intention des personnes au courant de l'algèbre commutative :** Si on munit E d'une structure de $\mathbb{C}[X]$-module en posant $P \cdot v = (P(T))(v)$, alors la définition de la semisimplicité de T est simplement la définition de la semisimplicité de E en tant que $\mathbb{C}[X]$-module (tout sous-module admet un supplémentaire). Or un module est semisimple ss'il est somme directe de modules simple. Et il est immédiat qu'un sous-espace de E est un module simple ssi c'est la droite vectorielle engendrée par un vecteur propre. Noter également qu'ici, puisqu'on sait *a priori* que la somme des modules simples est directe, la démonstration du fait que "semisimple équivaut à somme directe de modules simples" est simplifiée (!). On obtient donc le résultat de manière passablement triviale. Comme quoi une évidence d'algèbre commutative peut faire un exercice de taupe modérément difficile...

Exercice rigolo. Si M est une matrice complexe, on appelle exponentielle de M et on note $\exp M$ la matrice somme de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$$

(la somme est effectuée coefficient par coefficient). Calculer les exponentielles des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice facile. On appelle trace d'une matrice carrée la somme de ses coefficients diagonaux. Montrer que la trace d'une matrice diagonalisable est la somme de ses valeurs propres.

Exercice encore plus facile, qui devrait être du cours, mais on ne sait jamais. Montrer que le déterminant d'une matrice diagonalisable est le produit de ses valeurs propres.