Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingt-quatrième semaine

David A. Madore

`david.madore@ens.fr`

`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.59 ± 0.22. Écart type : 2.55.

Théorème célèbre. On rappelle qu'une partie D de $\mathbb{R}^n$ est dite *dense* ssi pour toute boule ouverte non vide B de $\mathbb{R}^n$ l'intersection $D \cap B$ est non vide. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}$, G_i est un ouvert dense (de $\mathbb{R}^n$). Montrer que l'intersection des G_i est dense (mais ce n'est pas nécessairement un ouvert).

> **Remarque :** Ce théorème s'appelle le théorème de Baire. Il est remarquablement utile pour obtenir des estimations uniformes sur un ensemble dense à partir d'estimations ponctuelles. Par exemple : la limite d'une suite de fonctions continues qui converge ponctuellement (mais non nécessairement uniformément) est continue sur une partie dense. Ou encore : une fonction de deux variables réelles dont les dérivées partielles par rapport à ces deux variables existent en tout point est différentiable sur une partie dense. Une autre conséquence très importante du théorème de Baire est le théorème de Banach-Steinhaus en analyse fonctionnelle.

Compacité. Soit K une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$. On suppose donnée une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts tels que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Il s'agit de montrer qu'il existe $J \subseteq I$ <u>fini</u> tel que $K \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$. [On dit que "de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.] Pour cela, on montrera d'abord [lemme de précompacité] que pour tout $\varepsilon > 0$, K peut être recouvert par une famille finie de boules ouvertes de rayon ε (c'est-à-dire qu'il existe $x_1, \ldots, x_n$ tels que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$. On montrera [lemme de Lebesgue] alors qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$ la boule $B(x, \varepsilon)$ soit incluse dans un des U_i. On pourra alors conclure.

> **Remarque :** Dans des espaces plus généraux que les espaces vectoriels normés (espaces métriques, espaces topologiques), on appelle compact un ensemble dont tout recouvrement par des ouverts a un sous-recouvrement fini.

Mon exercice à l'ENS de Lyon. On considère un homéomorphisme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire que f est bijective, continue et de réciproque f^{-1} continue). Pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, on pose

$$M_f(a,r) = \sup\{\|f(x) - f(a)\| \colon \|x-a\| \leq r\}$$

Montrer que le sup en question est atteint, et n'est atteint que pour des points x tels que $\|x - a\| = r$. Montrer que la fonction $r \mapsto M_f(a,r)$ est strictement croissante. On pose de même, pour $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$,

$$m_f(a,r) = \inf\{\|f(x) - f(a)\| \colon \|x-a\| \geq r\}$$

Montrer que l'inf en question est atteint, et n'est atteint que pour des points x tels que $\|x - a\| = r$. Montrer que la fonction $r \mapsto m_f(a,r)$ est strictement croissante. On a clairement $m_f(a,r) \leq M_f(a,r)$. On supposera désormais qu'il existe une constante $K_f \geq 1$ telle que pour tous a et r on ait $m_f(a,r) \leq M_f(a,r) \leq K_f m_f(a,r)$ (dans ces circonstances, on dit que l'homéomorphisme f est *quasi-conforme*). Montrer qu'alors $M_f(a, 2r) \leq (1 + K_f) M_f(a,r)$. Montrer que $m_f(a,2r) \geq (1 + K_f^{-1}) m_f(a,r)$. Montrer que les homéomorphismes quasi-conformes forment un groupe pour la composition. [Je ne sais pas quelle serait la question suivante. C'est tout ce que j'ai fait à l'oral.]

Le théorème de L. E. J. Brouwer (dans $\mathbb{R}^2$). On pose identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. On pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$ et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : si $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est continue alors elle admet un point fixe (i.e. il existe $x \in \mathbb{D}$ tel que $f(x) = x$). On procède en quatre étapes. Premièrement, soit $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{U}$ continue : montrer qu'il existe une application $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = e^{i\varphi(x)}$ pour tout x (il s'agit d'un théorème de relèvement). Pour cela, on pourra écrire $g(x) = g(0) \prod_{p=1}^m G_p(x)$ avec $G_p(x) = g(\frac{px}{m}) / g(\frac{(p-1)x}{m})$, et choisir l'entier m assez grand pour qu'aucune des fonctions G_p ne prenne la valeur -1. Deuxièmement, si $h: \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ est continue, montrer qu'il existe deux points antipodaux (i.e. opposés, i.e. de la forme $x, -x$) de $\mathbb{U}$ qui ont la même image par h. Pour cela, on pourra considérer la fonction $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(t) = h(e^{i(t+\pi)}) - h(e^{it})$, et constater $H(\pi) = -H(0)$. Troisièmement, montrer qu'il n'existe pas de fonction $r: \mathbb{D} \to \mathbb{U}$ telle que $r(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{U}$ (on dit que le disque ne peut pas se rétracter continuement sur le cercle). Pour cela, on utilisera les deux résultats précédents. Enfin, montrer le résultat voulu. Pour cela, on supposera qu'il existe $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sans point fixe, et on considèrera l'application r qui à un point $x \in \mathbb{D}$ associe l'intersection de $\mathbb{U}$ et de la demi-droite ouverte d'origine $f(x)$ passant par x.

> **Remarque :** On constate que la démonstration montre l'existence d'un point fixe sans en construire un explicitement. Ce fait a beaucoup traumatisé Luitzen Egbertus Jan Brouwer, et l'a conduit à fonder sa propre école de mathématiques, l'école intuitioniste .

Analogue du lemme de Rolle. On rappelle que si $A \subseteq \mathbb{R}^2$, on définit son *intérieur*, $A°$, de la façon suivante : un point x est dans $A°$ ssi A est un voisinage de x. Supposons maintenant que A soit un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, d'intérieur $A°$ non vide, et que $f: A \to \mathbb{R}$ soit continue sur A, différentiable sur $A°$, et constante sur $A \setminus A°$. Montrer qu'alors il existe un point de $A°$ où df s'annule.