Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingt-troisième semaine

David A. Madore

`david.madore@ens.fr`

`http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html`

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.60 ± 0.23. Écart type : 2.59.

Lemme d'"évitement". *Soit $\gamma\colon [0;1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe continue, et $x \in \mathbb{R}^2$ un point quelconque. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une courbe continue $\gamma'\colon [0;1] \to \mathbb{R}^2$ qui ne passe pas par x et telle que $|\gamma'(t) - \gamma(t)| \leq \varepsilon$ pour tout t. [Indication : Délimiter autour de x une zone "de sécurité" (la boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon/2$) et une zone "interdite" (la boule fermée de centre x et de rayon $\varepsilon/4$). On construit γ' de façon à coïncider avec γ en-dehors de la zone de sécurité, à être dans celle-ci exactement quand γ y est, et à ne jamais pénétrer dans la zone interdite.]*

Courbe classique. *On considère la spirale dite "de Bernoulli" [qu'un des nombreux Bernoullis avait fait graver sur sa tombe] donnée en coordonnées polaires par*

$$\rho(\theta) = R\, a^{\theta}$$

pour deux réels $a, R > 0$. Calculer son rayon de courbure en tout point.

Courbes elliptiques. *On considère la courbe d'équation cartésienne $y^2 = f(x)$ où f est un polynôme à coefficients réels de degré 3. Pour rester dans le sujet du programme de khôlle, proposer un paramétrage de cette courbe (en la divisant éventuellement en plusieurs parties). Étudier ses branches asymptotiques, et ses tangentes en les points de l'axe des abscisses. Dans le cas particulier où f admet une racine double, donner un paramétrage rationnel (i.e. par des fonctions rationnelles) de la courbe (on dit qu'elle est unicursale).*

> **Remarque :** Dans le cas où f n'a pas de racine double, la courbe est dite elliptique. Elle n'est alors pas unicursale, et on introduit pour la paramétrer une fonction dite de Weierstraß, notée $\wp$. On touche ici à une branche des mathématiques appelée la Géométrie Algébrique.

Tangente méchante de Dante. *On considère la courbe paramétrée d'équation*

$$\begin{cases} x = e^{-1/t^2} \\ y = e^{-1/t^4} \end{cases}$$

(sauf pour $t = 0$ où elle vaut $(0, 0)$). Déterminer son comportement au voisinage de l'origine, et notamment sa tangente.

Distraction aimable. *Montrer que le graphe de la fonction continue*

$$x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$$

(et $0 \mapsto 0$) est de longueur infinie, disons sur $[-1; 1]$.

Courbe amusante (et très, très simple). *Étudier et tracer la courbe d'équation paramétrique*

$$\begin{cases} x = t\,(\cos t + 1) \\ y = t\, \sin t \end{cases}$$

Une enveloppe. *Soit A un point mobile de l'axe des abscisses, et B un point mobile de l'axe des ordonnés, de sorte que AB soit constante. Lorsque A et B se déplacent, l'union des segments $[AB]$ obtenus définit une figure dans le plan. On demande de paramétrer le bord de cette figure.*