Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingt-deuxième semaine

David A. Madore

david.madore@ens.fr

http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

(Jusqu'à présent : Moyenne des notes : 14.65 ± 0.24. Écart type : 2.62.

Exercice amusant. *On rappelle (?) qu'une partie C d'un espace vectoriel normé est dite convexe ssi pour tous points a, b de C le segment $[a; b] = \{(1-t)a + tb : t \in [0; 1]\}$ est dans C. On suppose que C est convexe, que a est intérieur à C (c'est-à-dire que C est un voisinage de a), et que b est adhérent à C. Montrer que $[a; b[= [a; b] \setminus \{b\}$ est inclus dans C. Montrer même que tout point de $[a; b[$ est intérieur à C.*

Distance à une partie. *Si A est une partie d'un espace vectoriel normé E, et x un point de E, on appelle distance de x à A et on note $d(x, A)$, le réel*

$$\inf_{y \in A} |x - y|$$

Montrer que cette distance n'est pas forcément atteinte (i.e. que l'$\inf$ en question n'est pas forcément un $\min$), qu'elle l'est toutefois dans le cas où A est fermé[*]*, mais pas nécessairement en un seul point. Montrer l'inégalité triangulaire*

$$d(x', A) \leq d(x, x') + d(x, A)$$

(pour $A \subseteq E$, et $x, x' \in E$). A-t-on nécessairement

$$d(x, x') \leq d(x, A) + d(x', A)$$

Exercice sans grand intérêt. *Soit E un espace vectoriel normé (non nul). Montrer qu'il n'existe pas deux applications linéaires continues $u, v : E \to E$ telles que $vu - uv = \mathrm{id}_E$. [Indication : Cela donne $vu^{n+1} - u^{n+1}v = (n+1)u^n$, et on considère la norme de cela.]*

Exercice qui devrait être du cours, sinon l'exercice précédent va faire très mal. *Soit E un espace vectoriel normé. On appelle $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

Montrer que ceci définit une structure d'espace vectoriel normé sur $\mathcal{L}(E)$, et que de plus $\|uv\| \leq \|u\|\,\|v\|$ pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple classique. *Soit E l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur $[0; 1]$. Si $f \in E$, on note $k(f)$ le plus petit k tel que f soit k-lipschitzienne. Par ailleurs, on note $N(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $M(f) = N(f) + k(f)$. Montrer que N et M sont deux normes sur E, et qu'elles ne sont pas équivalentes.*

Contre-exemples en masse. *En dimension infinie, les suites bornées n'admettent pas nécessairement de valeur d'adhérence (i.e. de sous-suite convergente), les applications linéaires ne sont pas nécessairement continues, les normes ne sont pas nécessairement équivalentes. Un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas nécessairement complet (i.e. une suite de Cauchy ne converge pas nécessairement).*

[*] *Cela signifie que tout point adhérent à A est dans A.*