Exercices de khôlle pour la MPSI

Vingt-et-unième semaine

David A. Madore
david.madore@ens.fr
http://www.eleves.ens.fr:8080/home/madore/index.html

Un classique qui aurait dû venir plus tôt. *Montrer que tout groupe fini est (isomorphe à) un sous-groupe d'un groupe symétrique.*

Un autre classique. *Montrer que* $\mathfrak{S}_n$ *est (isomorphe à) un sous-groupe de* $\mathfrak{S}_{n+1}$*, et aussi de* $\mathfrak{A}_{n+2}$ *(*$\mathfrak{S}_n$ *est le groupe symétrique sur* n *éléments, et* $\mathfrak{A}_n$ *est le groupe alterné, i.e. le groupe des permutations symétriques, sur* n *éléments).*

Ultra-classique (ça devient lassant). *Soient* $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ *des nombres complexes. Calculer*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

(déterminant dit "de Vandermonde").

Archi-classique (hélas). *Soient* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ *des complexes tels que pour tous* i, j *on ait* $a_i + b_j \neq 0$*. Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

(déterminant dit "de Cauchy"). [Indication : Supposer les a_i *deux à deux distincts. Décomposer la fonction rationnelle*

$$\frac{(b_1 - X) \cdots (b_{n-1} - X)}{(X + a_1) \cdots (X + a_n)}$$

en éléments simples, et utiliser cette décomposition pour simplifier la dernière ligne par une combinaison linéaire idoine des précédentes.]

Hyper-classique (eh oui !). *Soient* $a_1, \ldots, a_n$ *des nombres complexes. Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

(déterminant dit "circulant"). [Indication : Introduire la matrice $\Omega = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{i,j}$ *où* ω *est une racine primitive* n*-ième de l'unité, et calculer* $\det(A\Omega)$ *en fonction de* $\det(\Omega)$*.]*

Pas très classique. *Soient* $a, b, x_1, \ldots, x_n$ *des complexes. Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

[Indication : Ajouter x a tous les termes, et montrer que le déterminant ainsi obtenu est une fonction linéaire de x.]

Plus facile. *Soit a un nombre complexe. Calculer le déterminant $n \times n$ donné par*

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

Très zouli. *Soient A et B deux matrices réelles. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $B = MAM^{-1}$). Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.*